

M2 LMFI – Cours Fondamental de logique
THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION
Réductions gauche, de tête et standard:
théorème de normalisation gauche, résolubilité et
théorème de standardisation
(version préliminaire)

Alexis Saurin

Cours du 26 novembre 2021

Table des matières

1 Réduction de tête et réduction gauche	1
2 Résolubilité	3
3 Équivalence entre les théorèmes de normalisation gauche et de tête.	3
4 Standardisation	4
4.1 Réductions standards	4
4.2 Standardisation dans le cas SN (démonstrations à décommenter après remise du DM!!)	5
4.3 La standardisation, en général	5
5 Application de la standardisation à la normalisation gauche et à la résolubilité	8

Introduction

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à des manières particulières d'appliquer la β -réduction en contraignant les radicaux qui peuvent être réduits. Alors que dans les développements, on contraignait les radicaux à être des résidus de radicaux présents dans le terme initial, on va ici s'intéresser à contraindre les positions des radicaux qu'on peut réduire et définir des stratégies de réductions qui vont éliminer (ou au moins réduire) le non-déterminisme de la β -réduction. On verra ainsi deux stratégies de réduction particulièrement importantes, la réduction gauche et la réduction de tête et on introduira ensuite la notion de réduction standard qui formalise l'idée intuitive d'une réduction réduisant les radicaux de gauche à droite.

Les théorèmes de normalisation gauche, de normalisation de tête et de standardisation illustrent l'importance de ces trois notions.

1 Réduction de tête et réduction gauche

Remarque 1.1

Tout λ -terme peut s'écrire sous la forme $\lambda\bar{x}.(t)\bar{u}$ où t est soit une variable, soit un radical.

La remarque précédente nous conduit à la définition suivante :

Définition 1.2 (Forme normale de tête, Radical de tête, Radical interne)

Une **forme normale de tête** est un λ -terme de la forme $\lambda\bar{x}.(y)\bar{u}$ et dans ce cas y est appelée **variable de tête**.

Si, à l'inverse, le terme est de la forme $\lambda\bar{x}.(t)\bar{u}$ avec t un radical, on dira que t est le **radical de tête**. Tout radical autre que le radical de tête est appelé **radical interne** et on notera $\text{RAD}_i(t)$ l'ensemble des radicaux internes de t .

Définition 1.3 (Réduction de tête, réduction interne)

La **réduction de tête**, notée $\longrightarrow_h$, désigne la restriction de la β -réduction qui ne réduit que des radicaux de tête, lorsque ceux-ci existent. Une **réduction de tête** sera alors une réduction dans le sens usuel du terme dont toutes les étapes de réduction sont des réductions de tête.

Si le radical de tête existe, il est évidemment unique et on parlera donc de **stratégie de réduction de tête** pour en souligner le caractère déterministe.

On appelle **réduction interne** toute réduction qui n'est pas une réduction de tête. Contrairement à la réduction de tête, la réduction interne ne constitue pas une stratégie de réduction puisqu'il y a en général plusieurs radicaux internes (il y a au moins $\#(\text{RAD}(t)) - 1$ radicaux internes).

Définition 1.4 (Réduction gauche)

La **réduction gauche** est la restriction de la β -réduction qui réduit le radical le plus à gauche dans le terme.

Il est évident que le radical de tête est le radical le plus à gauche du terme, mais que la réciproque est fautive : un rédex gauche peut-être un rédex interne dès que le terme considéré est en forme normale de tête.

Définition 1.5 (Terme normalisable à gauche, terme normalisable de tête)

Un terme $t \in \Lambda$ est dit **normalisable à gauche** (resp. **normalisable de tête**) si la réduction gauche (resp. la réduction de tête) termine.

Exemple 1.6

- $(I)\lambda x.(x)\Omega$ est normalisable de tête sans être normalisable à gauche.
- $(I)^k I$ est normalisable à gauche en k étapes de β -réduction.
- $(\Delta_3)\Delta_3$ où $\Delta_3 = \lambda x.(x)xx$ n'est ni normalisable à gauche, ni normalisable de tête.

Théorème 1.7 (Théorème de normalisation gauche)

Soit $t \in \Lambda$. t est normalisable si, et seulement si, t est normalisable à gauche.

Le théorème précédent indique que t a une forme normale si, et seulement si, la stratégie de réduction gauche termine.

La démonstration de ce théorème est repoussée à plus tard (remarquer, cependant, que l'implication $\Leftarrow$ est triviale).

Exercice 1.1

Montrer qu'il n'y a pas de λ -congruence qui identifie tous les termes non-normalisables à part la relation triviale.

Proposition 1.8

t est normalisable de tête ssi $\lambda x.t$ l'est, ssi $(t)x$ l'est.

Lemme 1.9

La réduction de tête définit une stratégie de réduction déterministe : étant donné $k \in \mathbb{N}$, la relation qui met en relation $u, v \in \Lambda$ si $u \longrightarrow_h^k v$ est une fonction partielle.

Notation 1.10 (u^k)

On note u^k le $k^{\text{ième}}$ réduit de u par la réduction de tête si celui-ci existe.

Lemme 1.11

Soient $u, u', v \in \Lambda$.

- Si u n'est pas en forme normale de tête, alors $u\{v/x\}$ n'est pas en forme normale de tête et $u\{v/x\} \longrightarrow_h u^1\{v/x\}$.
- La réduction de tête est substitutive : si $u \longrightarrow_h^* u'$ alors $u\{v/x\} \longrightarrow_h^* u'\{v/x\}$.

Proposition 1.12

Si $u\{v/x\}$ est normalisable de tête, alors u l'est également.

Démonstration : Par induction sur la longueur de la normalisation de tête de $u\{v/x\}$.

Le cas de base est immédiat car si $u\{v/x\}$ est en forme normale de tête, u l'est également.

Supposons le résultat vrai pour tout $u\{v/x\}$ dont la normalisation de tête contient au plus n étapes de réductions et soit $u\{v/x\}$ dont la normalisation de tête est de longueur $n+1$. Si u est en forme normale de tête, on peut conclure. Sinon, on a $u\{v/x\} \longrightarrow_h u^1\{v/x\}$ par le lemme précédent et la normalisation de tête de $u^1\{v/x\}$ est de longueur n ce qui assure que u^1 , et donc u , est normalisable de tête. □

2 Résolubilité

Dans cette partie, on va s'intéresser à caractériser les termes dits **résolubles**.

Définition 2.1 (Terme résoluble)

Soit $t \in \Lambda^0$. t est **résoluble** si il existe $n \in \mathbb{N}$ et $u_1, \dots, u_n \in \Lambda$ tels que $(t)u_1 \dots u_n =_\beta \lambda x.x$.
Un terme de Λ est résoluble si l'une de ses clôtures est résoluble.

En vue de caractériser les termes résolubles, on va étudier quelques lemmes préliminaires :

Lemme 2.2

1. t est résoluble si, et seulement si, il existe des suites $v_1, \dots, v_m, x_1, \dots, x_n$ et $u_1, \dots, u_n$ telles que $(t\{u_1/x_1\} \dots \{u_n/x_n\})v_1 \dots v_m =_\beta I$
2. Si $(t)u$ est résoluble alors t est résoluble.
3. Si t est résoluble et $t =_\beta u$, alors u est résoluble (ie l'ensemble des termes résolubles est clos par β -équivalence).
4. Toute forme normale de tête est résoluble.

Théorème 2.3 (Théorème de normalisation de tête)

Soit $t \in \Lambda$. t est résoluble si, et seulement si, t est normalisable de tête.

Le lemme précédent nous permet de déduire immédiatement l'implication $\Leftarrow$. L'autre implication sera démontrée plus tard.

Corollaire 2.4

Soient x une variable et t un terme. t est résoluble si, et seulement si, $(t)x$ est résoluble si, et seulement si, $\lambda x.t$ est résoluble si, et seulement si, $\lambda x.(t)x$ est résoluble.

3 Équivalence entre les théorèmes de normalisation gauche et de tête.

On montre qu'on peut déduire le théorème de normalisation gauche du théorème de normalisation de tête et réciproquement. On ne s'intéressera bien sûr qu'aux deux moitiés des théorèmes dont on n'a pas encore de démonstration et qui sont les parties difficiles de ces résultats.

Proposition 3.1

Sous l'hypothèse du théorème 2.3, si t est normalisable, alors il est normalisable à gauche.

Démonstration : Soit $t \in \Lambda$ normalisable, de forme normale $u = \lambda\bar{x}.(y)\bar{v}$. On veut montrer qu'on peut atteindre u par une réduction gauche.

t est donc résoluble : ayant une forme normale, il a a fortiori une forme normale de tête. Par le théorème 2.3, t est donc normalisable de tête, soit t' la forme normale de tête dont l'existence est ainsi garantie : $t' = \lambda\bar{x}'.(y')\bar{v}'$. Par confluence du λ -calcul, on a $t' = \lambda\bar{x}'.(y')\bar{v}' \rightarrow_{\beta}^* u = \lambda\bar{x}.(y)\bar{v}$. Il s'ensuit que $\bar{x}' = \bar{x}$, $y = y'$, la longueur de $\bar{v}'$ est identique à celle de $\bar{v}$, soit par exemple n cette longueur, et pour tout $1 \leq i \leq n$, $v'_i \rightarrow_{\beta}^* v_i$.

On montre le résultat par induction sur la taille de la forme normale de t .

- Si u est tel que $n = 0$ (ie une variable ou de la forme $\lambda\bar{x}.y$), alors on a le résultat par ce qui a été noté précédemment.
- Sinon, les v_i ont tous une taille inférieure à u et on peut donc appliquer l'hypothèse d'induction aux termes v'_i (puisque v'_i se normalise sur v_i de taille inférieure à celle de u : les v'_i ont chacun une réduction gauche qui termine (et aboutit à v_i)).

Or la réduction gauche de t débute par la réduction de tête de t qui termine sur sa forme normale de tête t' puis consiste en la réduction gauche de v'_1 qui fait atteindre le terme $\lambda\bar{x}.(y)v_1v'_2 \dots v'_n$, qui se poursuit en la réduction de tête de v'_2 qui termine et ainsi de suite jusqu'à atteindre, par la réduction gauche, la forme normale u .

□

Proposition 3.2

Sous l'hypothèse du théorème 1.7, si t est résoluble, alors il est normalisable de tête.

Démonstration : On suppose que t est résoluble et n'a pas de variable libre (sinon, on considère sa clôture, dont la résolubilité et la normalisation de tête sont équivalentes à celles de t lui-même).

Soient $u_1, \dots, u_n$ tels que $(t)u_1 \dots u_n \rightarrow_{\beta} \lambda x.x$. En particulier, $(t)u_1 \dots u_n$ est normalisable et donc sa réduction gauche termine ce qui entraîne que sa normalisation de tête termine. On remarque que $(t)u_1 \dots u_n = (t)x_1 \dots x_n \{u_1/x_1\} \dots \{u_n/x_n\}$ pour des x_i non libres dans t . Les lemmes 1.8 et 1.12 nous assure donc que $(t)x_1 \dots x_n$ est normalisable de tête et finalement que t est normalisable de tête, ce que nous souhaitons.

□

4 Standardisation

Les sections précédentes ont mis en évidence l'importance de la réduction par la gauche pour trouver les formes normales. On peut se demander s'il y a une classe de réductions qui généralise cela à tout terme dans le sens où il s'agirait d'un sous-ensemble $\mathcal{S}$ des réductions tel que si $t \rightarrow_{\beta}^* u$, il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que $t \xrightarrow{\sigma} u$.

4.1 Réductions standards

On va maintenant s'intéresser à un autre type de réductions qui généralisent réduction de tête et réduction gauche, les réductions standards.

Définition 4.1 (*Réduction standard*)

Une réduction $\sigma = (t_i, a_i)_{i \in I \subseteq \mathbb{N}}$ (finie ou infinie) est dite **standard** si pour tous i, j tels que $i < j \in I$, il n'y a pas de radical $b \in \text{RAD}(t_i)$ à gauche de a_i tel que $a_j \in b/(t_k, a_k)_{i \leq k < j}$.

S'il existe une dérivation standard σ , $t \xrightarrow{\sigma} u$, on note $t \xrightarrow{st} u$.

On remarque immédiatement que la réduction de tête et la réduction gauche sont des réductions standards mais que toute réduction standard n'est pas forcément une réduction gauche.

L'idée que l'on veut capturer avec la notion de réduction standard est celle d'une réduction qui ne réduira jamais plus à gauche qu'un radical déjà réduit. Il n'est pas forcément immédiat de voir que la définition précédente capture bien cette notion puisqu'elle ne parle que de résidus. On constate cependant en étudiant les cas de création de radicaux qu'on a bien tout ce qu'on veut avec cette définition. En effet, un radical n'est jamais créé à gauche du radical qui le crée.

La définition alternative (et équivalente) des réductions standards à partir des degrés des radicaux est plus intuitive, raison pour laquelle nous la mentionnons ici même si nous ne l'utiliserons pas dans la démonstration de la standardisation.

Définition 4.2 (*Degré d'un radical et réduction standard*)

Le **degré d'un radical** r de t , que l'on note $d(r)$, est le nombre de radicaux à sa gauche, c'est-à-dire le nombre de « (λ) » à gauche du « (λ) » de r ou bien le nombre d'occurrences de radicaux plus petites pour l'ordre alphabétique.

Le **degré d'une étape de réduction** $t \xrightarrow{a} u$, est le degré du radical d'occurrence a .

Le **degré d'une réduction** σ , noté $d(\sigma)$, est le maximum des degrés des radicaux réduits dans σ .

La notion de réduction standard s'exprime en termes de degrés :

Proposition 4.3

Une réduction $\sigma = (t_i, a_i)_{i \in I \subseteq \mathbb{N}}$ est standard si, et seulement si, les degrés des radicaux réduits dans σ sont croissants : $\forall i \leq j \in I, d(a_i) \leq d(a_j)$.

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.4 (*de Standardisation*)

Soient $t, u \in \Lambda$. Si $t \longrightarrow_{\beta}^* u$ alors $t \xrightarrow{st} u$.

4.2 Standardisation dans le cas SN (démonstrations à décommenter après remise du DM!!)

Avant de passer au théorème de standardisation dans toute sa généralité, on commence par le démontrer dans le cas particulier des termes fortement normalisants. Pour cela, la notation et le lemme suivants sont utiles :

Notation 4.5

Soit $t \in \Lambda$. Si la réduction gauche de t atteint une abstraction $\lambda x.u$, on note $\text{Val}(t)$ le premier terme commençant par une abstraction qui apparaît dans la réduction gauche issue de t .

Comme la réduction gauche est déterministe, la notation précédente est bien définie.

Lemme 4.6

Soient $t, u \in \Lambda$ et σ une réduction de t à $\lambda x.u$. Si σ est une réduction standard, alors il existe des réductions ρ et τ telles que $\sigma = \rho \cdot \tau$ où $t \xrightarrow{\rho} \text{Val}(t)$, $\text{Val}(t) \xrightarrow{\tau} u$, ρ est une réduction gauche (mieux : une réduction de tête) et τ est standard.

Démonstration : À décommenter après remise du DM. □

Théorème 4.7 (*standardisation pour les termes SN*)

Soient $t, u \in \Lambda$, t fortement normalisant, tels que $t \longrightarrow_{\beta}^* u$. Alors $t \xrightarrow{st} u$.

Démonstration : À décommenter après remise du DM. □

4.3 La standardisation, en général

On remarque tout d'abord que toute réduction standard $\sigma : t \longrightarrow_{\beta}^* u$ est de la forme $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ où σ_1 est une réduction de tête et σ_2 une réduction interne. (qui sont toutes deux standards).

Alors qu'en général la concaténation de deux réductions standards n'a aucun raison d'être standard, dans le cas ci-dessus on a bien la réciproque : si σ_1 est une réduction de tête et σ_2 une réduction interne *standard*, alors $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ est une réduction standard.

Pour montrer la standardisation dans le cas général, on va utiliser la remarque ci-dessus qui nous conduit à démontrer un résultat préalable à la standardisation, le théorème dit de quasi-standardisation :

Théorème 4.8 (Quasi-standardisation, $\longrightarrow_h^* \longrightarrow_i^*$)

Si $t, u \in \Lambda$, $t \longrightarrow_\beta^* u$ alors il existe $v \in \Lambda$ tel que $t \longrightarrow_h^* v$ et $v \longrightarrow_i^* u$.

Avant de démontrer ce théorème, on rappelle qu'on note $t \xrightarrow{\mathcal{F}} u$ la classe des développements de $(t, \mathcal{F})$ issus de t (u étant déterminé de manière unique à partir de $(t, \mathcal{F})$ d'après le théorème des développements finis) et possédant une borne $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ sur la longueur de ces développements et on dira que $\mathcal{F} \subseteq \text{RAD}(t)$ est *interne* si $\mathcal{F} \subseteq \text{RAD}_i(t)$.

Le lemme suivant va nous servir dans la démonstration de la quasi-standardisation :

Lemme 4.9

Si $t, t' \in \Lambda$, $a \in \text{RAD}_i(t)$ tels que $t \xrightarrow{a} t'$, alors :

- si t' a un radical de tête b' , t a un radical de tête b et $b/(t, a) = \{b'\}$ (c'est-à-dire que b est l'unique résidu de b après a);
- Si $\mathcal{F} \subseteq \text{RAD}_i(t)$, alors $\mathcal{F}/(t, a) \subseteq \text{RAD}_i(t')$.

Démonstration : Pour le premier point, on constate que d'après l'énoncé du lemme, t n'est pas en FNT car dans ce cas t' n'aurait pas de radical de tête; soit b l'occurrence du radical de tête de t . On a donc $t = \lambda x_1 \dots x_k.(\lambda y.u)vw_1 \dots w_l$ et puisque t se réduit de manière interne sur t' , on a également $t = \lambda x_1 \dots x_k.(\lambda y.u')v'w'_1 \dots w'_l$ où tous les u', v', w'_i sont égaux aux u, v, w_i sauf l'un d'entre eux qui est le réduit, en une étape, du sous-terme de t , correspondant à la réduction d'occurrence a . Les positions relatives de a et b nous assurent que $b/a = \{b'\}$ (on a soit $b < a$ soit b qui est à droite de a), d'où le résultat.

La seconde partie du lemme est immédiate : si t' est en forme normale de tête c'est trivial et sinon, par la première partie du lemme et puisque deux radicaux distincts possèdent des ensembles de résidus disjoints¹, on sait que les résidus de radicaux internes sont forcément internes.

□

Corollaire 4.10

Soient $t \in \Lambda$, $\mathcal{F} \subseteq \text{RAD}_i(t)$. Tout développement σ de $(t, \mathcal{F})$ est interne et si t' est le résultat de ce développement, alors le radical de tête de t' , s'il existe, est l'unique résidu du radical de tête de t (qui, dans ce cas, existe forcément) après σ .

Démonstration : Il s'agit d'une extension immédiate du lemme précédent. On note $\sigma = (t_i, a_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{i+1} = \mathcal{F}_i/(t_i, a_i)$. Par le lemme précédent, tous les $\mathcal{F}_i$ et tous les a_i sont internes. Si t' possède un radical de tête, tout terme t_i intervenant dans la dérivation σ a un radical de tête qui est résidu du radical de tête de t_{i-1} dès que $i \neq 0$.

□

Définition 4.11

Soit $t \in \Lambda$. On appelle **réduit de tête** de t tout terme u tel que $t \longrightarrow_h^* u$, et on notera $\text{HR}(t)$ l'ensemble des réduits de tête de t .

Théorème 4.12

Soient $(t_j)_{0 \leq j \leq n}$, $(\mathcal{F}_j)_{0 \leq j \leq n}$ tels que $\forall 0 \leq j < n$ on ait $\mathcal{F}_j \subseteq \text{RAD}(t_j)$ et $t_j \xrightarrow{\mathcal{F}_j} t_{j+1}$. Alors il existe une famille de termes $(u_j)_{0 \leq j \leq n}$ et pour $0 \leq j < n$ des $\mathcal{F}_j^i \subseteq \text{RAD}_i(u_j)$ tels que :

- u_0 est un réduit de tête de t_0 ;
- si $0 \leq j < n$, $u_j \xrightarrow{\mathcal{F}_j^i} u_{j+1}$;
- $u_n = t_n$.

1. au sens ensembliste, pas au sens de l'ordre préfixe...

Démonstration : On commence par remarquer que si tous les $\mathcal{F}_j$ sont internes, le résultat est trivial en posant $u_j = t_j, j \leq n$ et $\mathcal{F}_j^i = \mathcal{F}_j, j < n$. La difficulté vient du cas où un radical de tête se trouve réduit dans l'un des $\mathcal{F}_j$.

Ce que nous assure le théorème, c'est d'une certaine mesure qu'on peut faire remonter, en tête si l'on peut dire, dans la séquence de développements (on s'autorisera à parler d'étape de réduction lorsque cela ne cause pas d'ambiguïté) $(t_j, \mathcal{F}_j)_{0 \leq j < n}$ des étapes réductions de tête.

L'idée de la démonstration va consister à transformer progressivement une famille de développements $(t_j, \mathcal{F}_j)_{0 \leq j < n}$ de longueur n satisfaisant l'énoncé du lemme en une autre famille de même longueur n $(t'_j, \mathcal{F}'_j)_{0 \leq j < n}$ satisfaisant l'énoncé du lemme, aboutissant au même terme t_n et telle que $t_0 \xrightarrow{h} t'_0$. On montrera que ce faisant, on fait diminuer une bonne mesure pour nous assurer la possibilité de raisonner par induction.

Il peut y avoir plusieurs k, l tels que des radicaux de tête sont réduits dans les développements de $(t_k, \mathcal{F}_k)$ et $(t_l, \mathcal{F}_l)$: il suffit que $\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_l$ contiennent tous deux des radicaux de tête. Il semble naturel, pour cela, de s'intéresser pour commencer au premier $\mathcal{F}_j$ dans lequel intervient une réduction de tête.

Par exemple, si il s'agit de $\mathcal{F}_0$, cela signifie que t_0 possède un radical de tête, h_0 , qui est dans $\mathcal{F}_0$. On peut alors considérer t'_0 tel que $t_0 \xrightarrow{h_0} t'_0$ et $\mathcal{F}'_0 = \mathcal{F}_0/h_0$. Le théorème des développements finis nous assure que $t'_0 \xrightarrow{\mathcal{F}'_0} t_1$. Si on considère donc la famille $(t'_i, \mathcal{F}'_i)_{i < n}$ où $t'_0, \mathcal{F}'_0$ sont définis comme ci-dessus et $t'_{i+1}, \mathcal{F}'_{i+1}$ sont égaux à $t_{i+1}, \mathcal{F}_{i+1}$, on est dans la configuration du théorème et on a $t_0 \xrightarrow{h} t'_0$.

Pour conclure, il faudrait que nous puissions disposer d'une mesure sur laquelle faire une induction, ie pour laquelle $(t'_i, \mathcal{F}'_i)_{i < n}$ serait plus petite que $(t_i, \mathcal{F}_i)_{i < n}$. On ne peut pas raisonner sur la taille des $\mathcal{F}_i$ puisqu'il est fort possible que $\mathcal{F}'_0$ soit plus grand que $\mathcal{F}_0$. Par contre, puisqu'à partir de tout développement σ de $(t'_0, \mathcal{F}'_0)$ on obtient un développement $h_0 \cdot \sigma$ de $(t_0, \mathcal{F}_0)$, il est bien clair que l'ensemble des développements a été simplifié ; en particulier, les longueurs des développements sont raccourcies : si on considère le sup de la longueur des développements, on a $\mathcal{N}(\mathcal{F}'_0) < \mathcal{N}(\mathcal{F}_0)$. Dans ce cas, on pourrait trouver $(u_j, \mathcal{F}_j^i)$ tels que tous les $\mathcal{F}_j^i$ sont internes et $t_0 \xrightarrow{h_0} t'_0 \xrightarrow{h} u_0$, ce qui nous donne le résultat.

Dans le cas général, le premier radical de tête apparaît dans l'un des $\mathcal{F}_i$ et on va chercher à le faire remonter progressivement en tête de la réduction, ce qui veut dire qu'on va transformer $\mathcal{F}_i$ en $\mathcal{F}'_i$ et qu'il faudra incorporer le radical de tête à une réduction précédente, mettons d'indice $j < i$ mais ce faisant, on complexifie l'ensemble $\mathcal{F}_j$ et, en lui ajoutant un nouveau radical, on va évidemment risquer de rallonger la longueur de son plus long développement.

Pour que cela ne gêne pas la décroissance de notre mesure, il suffit de considérer un ordre lexicographique sur n-uplets constitués des bornes sur la longueur des développements de $\mathcal{F}_i$, en donnant un poids plus fort à $\mathcal{N}(\mathcal{F}_i)$ qu'à $\mathcal{N}(\mathcal{F}_j)$ si $j < i$.

En résumé, on va considérer les n-uplets $(\mathcal{N}(\mathcal{F}_{n-1}), \dots, \mathcal{N}(\mathcal{F}_0))$ ordonnés par l'ordre lexicographique usuel.

On a déjà traité le cas de base où tous les $\mathcal{F}_i$ sont internes ainsi que le cas où le premier radical de tête se trouvait dans $\mathcal{F}_0$. Il ne nous reste plus qu'à considérer le cas où le premier radical de tête se trouve dans $\mathcal{F}_k, k > 0$. Soit h_k le radical de tête en question, t'_k le réduit de tête de t_k ($t_k \xrightarrow{h_k} t'_k$) et $\mathcal{F}'_k = \mathcal{F}_k/h_k$; pour la même raison que dans le cas $k = 0$, on a $\mathcal{N}(\mathcal{F}'_k) < \mathcal{N}(\mathcal{F}_k)$.

Par hypothèse, $\mathcal{F}_{k-1}$ est interne aux radicaux de t_{k-1} et donc on a $t_{k-1} \xrightarrow{i^*} t_k$. Le lemme précédent s'applique donc et nous assure que t_{k-1} possède un radical de tête h_{k-1} et que le résidu de h_{k-1} par $\mathcal{F}_{k-1}$ est $\{h_k\}$; On pose alors $\mathcal{F}'_{k-1} = \mathcal{F}_{k-1} \cup \{h_{k-1}\}$. Par le théorème des développements finis, tout développement de $\mathcal{F}_{k-1}$ aboutit en t_k et $\mathcal{F}'_{k-1}/\mathcal{F}_{k-1} = \{h_k\}$ ce qui nous assure que les développements de $\mathcal{F}'_{k-1}$ aboutissent en t'_k . On a alors la séquence de développements suivants :

$$\sigma' : t_0 \xrightarrow{\mathcal{F}_0} t_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_1} \dots t_{k-1} \xrightarrow{\mathcal{F}'_{k-1}} t'_k \xrightarrow{\mathcal{F}'_k} t_{k+1} \xrightarrow{\mathcal{F}_{k+1}} \dots \xrightarrow{\mathcal{F}_{n-1}} t_n$$

et on a, puisque $\mathcal{N}(\mathcal{F}'_k) < \mathcal{N}(\mathcal{F}_k)$,

$$(\mathcal{N}(\mathcal{F}_{n-1}), \dots, \mathcal{N}(\mathcal{F}_{k+1}), \mathcal{N}(\mathcal{F}'_k), \mathcal{N}(\mathcal{F}'_{k-1}), \dots, \mathcal{N}(\mathcal{F}_0)) <_{lex} (\mathcal{N}(\mathcal{F}_{n-1}), \dots, \mathcal{N}(\mathcal{F}_0))$$

d'où la possibilité d'appliquer l'hypothèse d'induction à σ' obtenant ainsi des u_j et $\mathcal{F}_j^i$ qui conviennent également pour σ concluant ainsi la preuve. □

On peut maintenant compléter la preuve du théorème de quasi-standardisation :

Démonstration : En effet, si $t_0 \xrightarrow{\sigma} t_n$ avec $\sigma = (t_j, a_j)_{j \in J}$, on pose $\mathcal{F}_j = \{a_j\}$. Le théorème précédent nous assure qu'il existe des u_j et $\mathcal{F}_j^i$ tels que $t_0 \longrightarrow_h^* u_0$ et $u_0 \xrightarrow{\mathcal{F}_0^i} \dots \xrightarrow{\mathcal{F}_{n-1}^i} u_n = t_n$ avec tous les $\mathcal{F}_j^i$ des ensembles de radicaux internes d'où

$$t_0 \longrightarrow_h^* u_0 \longrightarrow_i^* t_n.$$

□

Le théorème de standardisation suit directement de la quasi-standardisation :

Démonstration : Soient $t, u \in \Lambda$, $t \longrightarrow^* u$. On montre par induction sur la taille de u qu'on peut standardiser la réduction de t à u .

- Si u est une variable, alors la quasi-standardisation nous assure que $t \longrightarrow_h^* u$ (une réduction interne ne peut jamais aboutir sur une variable...) d'où le résultat.
- Sinon, on a $u = \lambda x_1 \dots x_k. (h) u_1 \dots u_l$. Par le théorème de quasi-standardisation, on a $v \in \Lambda$ tel que $t \xrightarrow{\sigma}^* v \xrightarrow{\tau}^* u$ et la réduction de v à u étant interne, on a $v = \lambda x_1 \dots x_k. (h') v_1 \dots v_l$ avec $h' \longrightarrow^* h$ et $v_j \longrightarrow^* u_j$.

Il est à peu près immédiat que h et h' sont soit tous deux des variables (et dans ce cas la même variable), soit tous deux des radicaux (car si h' est lui-même un radical, il ne peut jamais être réduit au cours de τ) et dans ce cas $h' = (\lambda y. w'_1) w'_2$ et $h = (\lambda y. w_1) w_2$ avec $w'_i \longrightarrow^* w_j, j = 1, 2$.

Quoi qu'il en soit, les u_j et, le cas échéant, les w_j sont plus petit que u et on peut leur appliquer l'hypothèse d'induction : $\sigma_j : v_j \xrightarrow{st} u_j$ et, le cas échéant, $\tau_j : w'_j \xrightarrow{st} w_j$. En assemblant les réductions de la manière suivante : $\sigma_{st} = \sigma \cdot (\tau_1 \cdot \tau_2) \cdot \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_l$ on obtient une réduction standard de t vers u .

□

5 Application de la standardisation à la normalisation gauche et à la résolubilité

Le théorème de normalisation gauche (et donc aussi le théorème de normalisation de tête) se déduit immédiatement de la standardisation. En effet :

Démonstration : Si t est normalisable de forme normale u , alors il existe une réduction standard de t vers u et on constate que cette réduction est nécessairement une réduction gauche car si elle ne réduisait pas à chaque étape le radical le plus à gauche, il resterait forcément un radical dans le terme auquel aboutit la réduction, mais ce terme est une forme normale ce qui est impossible.

□