Université de Paris

Intelligence Artificielle et Théorie des Jeux – TD 8

Exercice 1

Entraîner un percéptron pour qu'il exprime la conjonction $x_1 \wedge x_2$.

Exercice 2

L'ensemble d'apprentissage suivant est linéairement séparable :

						classe
$\vec{x_1}$	:	0	0	0	1	0
$\vec{x_2}$	:	0	1	1	1	1
$\vec{x_3}$	:	1	1	0	1	1
$\vec{x_4}$	:	0	0	1	0	0
$\vec{x_5}$	:	0	0	1	1	0
$\vec{x_6}$	:	1	0	0	1	1

Question 1: Entraîner un percéptron avec cet ensemble et la procédure de correction d'erreur. Le vecteur de poids du perceptron est un vecteur à cinq dimensions (la première composante pour le seuil). Commencer avec $\vec{w} = (0, 0, 0, 0, 0)$. Il est conseillé de présenter les vecteurs un par un dans l'ordre. Ne pas dépasser 23 itérations.

Soit n et $m \leq n$ des entiers positifs. Soit $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ la fonction booléenne telle que

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si au moins } m \text{ composantes de } \vec{x} \text{ valent 1,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Question 2: Donner le vecteur (de dimension $n + 1$) de poids d'un neurone qui réalise cette fonction.

Un perceptron multicouche, ou réseau de de neurones est constitué de plusieurs perceptrons connectés de manière à ce que les sorties des neurones d'une couche donnée sont les entrées de la couche suivante. La figure 1 représente un réseau à deux couches. Les entrées du réseau sont x_0, x_1 et x_2, x_0 étant une entrée qui est toujours égale à 1. Le réseau calcule une fonction boolénne de x_1 et x_2. La première couche calcule deux sorties $O_1 = \sum_{i=0}^{2} u_0 x_i > 0$ et $O_2 = \sum_{i=0}^{2} v_0 x_i > 0$, et puis le réseau a pour sortie, calculé par le seul neurone de la deuxième couche, $O = w_0 x_0 + w_1 O_1 + w_2 O_2 > 0$.

Soit n et $m \leq n$ des entiers positifs. Soit $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ la fonction booléenne telle que

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si exactement } m \text{ composantes de } \vec{x} \text{ valent 1,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Question 3: Donner un réseau de neurones à deux couches avec les vecteurs de poids pour réaliser cette fonction. Expliquer pourquoi un neurone ne suffit pas.

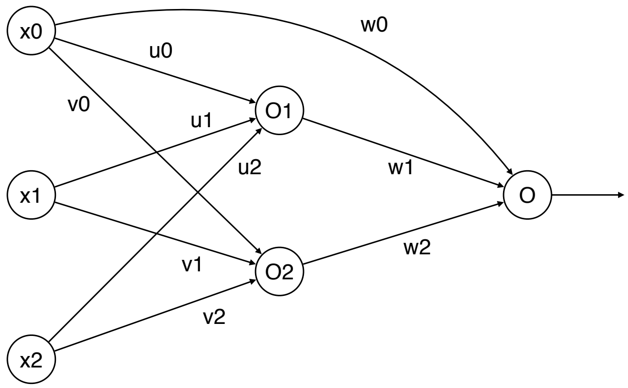

Figure 1: Réseaux à deux couches

Exercice 3

Question 1: Entraîner un perceptron à trois entrées $x_0 = 1$, x_1, et x_2, pour qu'il calcule la fonction booléenne $I(x_1, x_2) = x_1 \Rightarrow x_2$.

Question 2: Donner un réseau de neurones à deux couches à trois entrées $x_0 = 1$, x_1, et x_2, qui calcule la fonction boolénne $E(x_1, x_2) = x_1 \Leftrightarrow x_2$ (implication). Expliquer pourquoi un seul perceptron n'est pas suffisent pour calculer cette fonction.

Question 3: Etant données deux fonctions boolénnes f et g sur un ensemble de variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, et une variable booléenne x, on considère la fonction boolénne $ITE(x, f, g)$ sur les variables $\{x\} \cup X$ qui correspond à l'expression "si x alors $f(X)$, sinon $g(X)$".

Supposons que l'on ait deux réseaux de neurones R_f et R_g ayant pour entrées $x_0, x_1, \ldots, x_n$, où $x_0 = 1$, qui calculent les fonctions f et g, respectivement. Donner un réseau de neurones pour $ITE(x, f, g)$ ayant pour entrées $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Indication: Exprimer la fonction $ITE(x, f, g)$ comme une fonction booléenne à l'aide des opérations booléennes classiques.