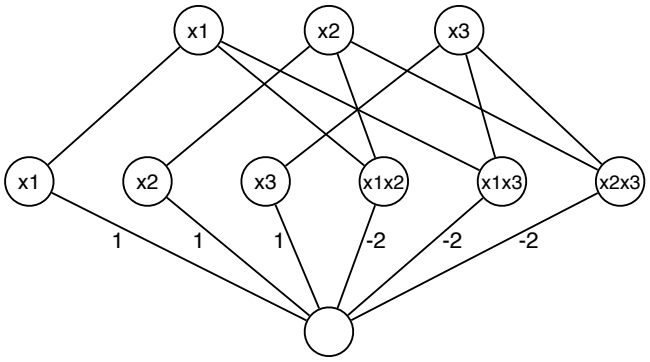
Université de Paris

Intelligence Artificielle et Théorie des Jeux - TD 9

Exercice 1 On considère un modèle de perceptron plus général que celui vu en cours. On suppose qu'entre la rétine (les cellules d'entrées) et la cellule de décision (cellule de sortie) se trouvent un certain nombre de cellules d'association. Ces cellules intermédiaires effectuent un traitement préliminaire sur certaines cellules de la rétine et transmettent le résultat de ce traitement à la cellule de décision. Les sorties des cellules d'association constituent une nouvelle rétine qui représentent les entrées de la cellule de décision.

Les cellules d'association peuvent calculer a priori n'importe quelle fonction booléenne. Une manière naturelle de restreindre les cellules d'association est de considérer qu'elles ne peuvent dépendre que d'un petit nombre de cellules de la rétine. On peut par exemple supposer que les cellules d'association ne peuvent dépendre que d'au plus d cellules de la rétine (perceptron à "domaine borné") ou, dans un contexte géométrique, qu'elles ne peuvent dépendre que de cellules de la rétine au plus distantes de d (perceptron à "diamètre limité"). Plus précisément, dans le cas d'une rétine rectangulaire, on définira la distance de deux cellules définies par leurs numéros de lignes et de colonnes par $d((l,c),(l',c')) = |l-l'| + |c-c'|$.



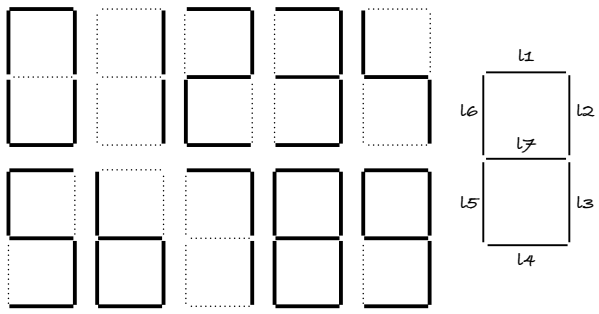
La figure ci-dessus présente un exemple de perceptron à domaine borné ($d = 2$). Ce perceptron à trois entrés reconnait si une des entrée et seulement une est active (est égale à 1).

On suppose dans les questions ci-dessous que la rétine est **linéaire** de taille arbitraire n.

- Montrer qu'un perceptron à domaine borné (avec $d = 2$) peut reconnaître des figures symétriques par rapport au centre de la rétine.
- Montrer qu'un perceptron à diamètre limité (avec $d = 1$) peut reconnaître des figures connexes.
- Montrer qu'un perceptron à domaine borné (avec $d = 2$) peut reconnaître les entrées possèdant exactement m cellules actives.

  Indication : On pourrait s'inspirer de l'exemple de la figure ci-dessus. Commencer avec le cas $m = 1$. Pour le cas général, prendre la même architecture de réseau et trouver les valeurs des poids et du seuil qui conviennent.

Exercice 2 Supposons que les chiffres sont représentés (sur un écran) par une combinaison de 7 leds (Light Emiting Diode) qui peuvent être allumés ou éteints, comme le montre la figure ci-dessous. Nous associons à chacun de ces leds un attribut binaire en posant qu'il prend la valeur 1 si le led correspondant est allumé et 0 s'il est éteint.



La population est l'ensemble des 10 chiffres $\Pi = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, l'ensemble des descriptions est le sous ensemble de $D = \{0, 1\}^7$ qui correspond aux descriptions des chiffres de Π (par exemple le chiffre 0 est décrit par le vecteur $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$). Nous nous intéressons au problème de classification des chiffres selon qu'ils sont premiers ou non. Les deux classes sont donc les ensembles de descriptions associés aux deux ensembles $P = \{2, 3, 5, 7\}$ et $\overline{P} = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$. La classe des chiffres premiers sera notée P ou 1, l'autre classe sera notée $\overline{P}$ ou 0.

- Apprentissage par arbres de décision.
  - Construire l'arbre de décision produit par l'algorithme d'apprentissage par arbre de décision en utilisant la fonction Entropie et la fonction gain associée. Ne détailler que les calculs dignes d'intérêt. On poursuit les calculs jusqu'à obtenir un arbre parfait.
  - On suppose que le led $l1$ tombe en panne (sa valeur est donc 0 pour tous les chiffres). Comment l'arbre précédent classe t-il les 10 chiffres ? Quelle est l'erreur (réelle) de ce classement ?
- Apprentissage par réseaux de neurones.
  - A partir de l'arbre de décision trouvé précédemment , construire un réseau de neurones multicouches qui classifie les chiffres premiers.
  - Déterminer un perceptron à trois entrées correspondant aux leds $l1$, $l2$, et $l6$ qui classifie les chiffres premiers.
  - Existe-t-il un perceptron à 7 entrées (les valeurs des 7 leds) qui soit capable de classifier d'une part les entrées correspondant à des chiffres, d'autre part celles qui ne correspondent pas à des chiffres ?

Quelques valeurs de log_2 pour des fractions inférieurs à 1:

	Dénominateur									
Num.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.0	−1.0	−1.585	−2.0	−2.322	−2.585	−2.807	−3.0	−3.170	−3.322
2		0.0	−0.585	−1.0	−1.322	−1.585	−1.807	−2.0	−2.170	−2.322
3			0.0	−0.415	−0.737	−1.0	−1.222	−1.415	−1.585	−1.737
4				0.0	−0.322	−0.585	−0.807	−1.0	−1.170	−1.322
5					0.0	−0.263	−0.485	−0.678	−0.848	−1.0
6						0.0	−0.222	−0.415	−0.585	−0.737
7							0.0	−0.193	−0.364	−0.515
8								0.0	−0.170	−0.322
9									0.0	−0.152
10										0.0