Primitives / Équations Différentielles

Question de cours

1 Intégration par partie et changement de variables
2 Recherche des solutions de (E)
3 Primitives de fractions rationnelles

1 Rappels

Si $t = \tan\frac{\phi}{2}$ alors $\sin\phi = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\phi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan\phi = \frac{2t}{1-t^2}$.

2 Primitives

Exercice 1 *()*.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Indication : introduire une primitive de f.

Exercice 2 *(Comparaison série-intégrale)*.

1. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t$?
2. Si $k \geq 2$, montrer que $\int_{k-1}^k \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.
3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Comparer avec $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.

Exercice 3 *()*.
Calculer en utilisant la tangeante de l'arc moitié

$$\int_a^x \frac{dt}{\sin t}$$

Exercice 4 *()*.

1. Soit P un polynôme de degré n et $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$. Montrer qu'une primitive de f est de la forme $Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q un polynôme de degré n
2. Calculer une primitive de la fonction $f(x) = 4x^3e^x + 12x^2e^x + 2xe^x + 3e^x$

Exercice 5 *(Des IPP)*.

1. Calculer une primitive de $f(x) = x\sin x$
2. Calculer une primitive de $f(x) = xe^x$
3. Calculer

$$\int_0^1 t^2\sqrt{2t+1}$$

Exercice 6 *(Puissances de* $\ln$*).*
Pour $n \geq 0$ soit $I_n := \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(t)^n \mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer (sans calcul) que la suite $(I_n)_n$ possède une limite.
3. Etablir une relation de récurrence liant I_{n+1} et I_n.
4. Montrer que $\forall n \geq 0$, $0 < I_n < \frac{e}{n+1}$ et en déduire $\lim_n I_n$.
5. Montrer que $I_n = (-1)^n(a_n\mathrm{e} - n!)$ où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'entiers > 0 vérifiant une relation de récurrence que l'on explicitera.

Exercice 7 *().*
Monter que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \arctan(t)\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{4}$.
Indication : commencer par poser $u = 1/t$

Exercice 8 *().*
Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{e^t + 1} dt$$

Exercice 9 *().* Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin \frac{2t}{1+t^2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.
Indication : on pourra intégrer par parties le facteur 1 multipliant l'arc.

Exercice 10 *().*
Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \tan(-2t)\mathrm{d}t$.

3 Équations différentielles

Exercice 11 *().*
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 2y = x^2$.

Exercice 12 *().*
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = 2\sin(x)$.

Exercice 13 *().*
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(x^2 + 1)y' + 2xy + 1 = 1 + 3x^2$

Exercice 14 *().*
Résoudre l'équation $xy'(x) + \alpha y(x) = 0$

Exercice 15 *(Équation Fonctionnelle).*
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

Indication : f(0) = 0, puis dériver en x *quelconque ...*

Exercice 16 *(Gronwall).*
Soit $\psi > 0$ et ϕ deux fonctions vérifiant pour tout $t \geq t_0$:

$$\phi(t) \leq K + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds$$

1. Montrer que pour tout $t \geq t_0$:

$$\phi(t) \leq K \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right)$$

2. Si on suppose de plus $K = 0$ et $\phi \geq 0$, en déduire que $\phi = 0$

Ceci permet de montrer dans certains cas l'unicité d'une solution

Exercice 17 *(Périodicité).* Soit ϕ une fonction continue T-périodique sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer toutes les solutions périodiques de l'équation $y' - ay = \phi$.

Exercice 18 *(Inégalité différentielle).*
On travaille sur un intervalle fermé $I = [a, b]$. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^+$ et f, g vérifiant :

$$\begin{cases} f(a) \leq g(a) \\ \forall t \in I, f'(t) \leq \alpha(t)f(t) \\ \forall t \in I, g'(t) = \alpha(t)g(t) \end{cases}$$

Montrer que pour tout $t \in I$ l'inégalité $f(t) \leq g(t)$ est vérifiée.