Développements limités

Exercice 1 *(Développement limité d'une somme).* On définit la suite (u_n) comme suit :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}$$

(i) Montrer qu'il existe un $C > 0$ tel que

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^4} \right| \leq C$$

(ii) En déduire un développement limité de u_n jusqu'au terme $1/n^2$

Exercice 2 *(Suite définie implicitement).* Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln x + x$.

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une unique solution à $f(x) = n$. On la note x_n

(ii) Montrer que $x_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. En déduire que $\ln(x_n) = o(x_n)$.

(iii) Montrer que $x_n \sim n$

(iv) En déduire que $x_n = n - \ln n + o(1)$

Indication: Considérer $y_n = x_n - n$

(v) En déduire le dévelppement asymptotique suivant

$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice 3 *(Racines itérées).*

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{(n+1) + u_n}$.

(i) Montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$

(ii) Calculer le terme suivant du développement asymptotique de u_n

Indication: Ré-injecter l'équivalent dans la définition par récurrence

(iii) Peut-on calculer le troisème terme de la même manière ?

Exercice 4 *(Développement limité d'une suite récurrente).*

> **Prérequis** *Théorème de Césaro* Soit u_n une suite qui converge vers une limite l. Alors la M_n définie ci-après converge aussi vers l
>
> $$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Soit $c > 0$ et $f : [0, c] \to [0, c]$ une fonction dont le développement limité en zéro est

$$f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$$

Où $\alpha > 1$ et $a > 0$.

(i) Montrer que pour u_0 suffisament proche de zéro, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers zéro

(ii) Déterminer alors un équivalent de u_n

(iii) Trouver un β réel tel que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ possède une limite finie non nulle

(iv) Utiliser le théorème de Césaro pour trouver un équivalent de u_n en $+\infty$

(v) Traiter l'exemple de $u_{n+1} = \sin u_n$

(vi) *(Bonus)* Comment trouver le terme suivant du développement de u_n ?

Exercice 5 *(Puissances entières).*
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. On note $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

(i) Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un $\theta \in]0,1[$ tel que $\Delta^n f(x) = f^{(n)}(x + n\theta)$.

Indication: Poser $g = \Delta^n f$ et utiliser le TAF

(ii) En utilisant ce résultat, montrer que si la suite définie par $u_n = n^c$ est entière pour tout n alors $c \in \mathbb{N}$.

Indication: Quelle est l'expression de la dérivée n-ème de $f : x \mapsto x^c$? En déduire que $\Delta^n f(k)$ est entier et tends vers zéro...

(iii) Quid de la réciproque ?

Exercice 6 *(Calculs de développements limités).*
Donner le développement limité en zéro des fonctions suivantes

(a) $\ln(\cos x)$ à l'ordre 6

(b) $\tan x$ à l'ordre 7

(c) $\ln^2(1+x)$ à l'ordre 4

(d) $\exp(\sin x)$ à l'ordre 3

(e) $\sin^6 x$ à l'ordre 6

(f) $x^2 + 2x + 1$ à l'ordre 25

Exercice 7 *(Fonction lisse).*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ sinon. Calculer pour tout n le développement limité à l'ordre n de f en 0.
Quelles conclusions en tirer ?

Exercice 8 *(Développement limité, dérivée).* Soit $f : I\mathbb{C}$ avec $0 \in I$.

(a) Montrer que f est dévirable en 0 si et seulement si elle admet un DL_1 en 0

(b) Considérons $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 mais n'est pas deux fois dérivable.

Exercice 9 *(Application à un calcul).*

(a) Déterminer un développement limité à l'ordre $1/x$ de $\ln(1+x)$.

(b) En déduire la limite l de
$$\left(\frac{\ln 1 + x}{\ln x}\right)^x \tag{1}$$

(c) Donner un équivalent de
$$\left(\frac{\ln 1 + x}{\ln x}\right)^x - l \tag{2}$$

Exercice 10 *(Irrationalité de e)*.
On définit la suite u_n :

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$$

Et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent
2. On admet l'inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction C^∞ sur un segment $[a, b]$:

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \right| \leq \frac{M_{n+1}|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

   Avec $M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.
   En appliquant cette inégalité à $f = \exp$, $[a, b] = [0, 1]$, $x_0 = 0$ et $x = 1$ en déduire $u_n \to e$
3. Supposons $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. En multipliant les suites u_n et v_n par $q \cdot q!$ en déduire une absurdité. *Indication : pour à partir du q-ème terme il se passe quelque chose.*

TODO : ne pas utiliser l'inégalité de T.L. mais plutôt un développement en série entière plus facile à justifier par récurrence. Dans le sytle, montrer par récurrence que :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{x^n}{n!} e^x dx$$