Probabilités (1)

▪ **350** ▪

Exercice 1 *(Tribu pré-image).*
Soit $f : \Omega \to \Omega'$ une application et $\mathcal{T}'$ une tribu sur Ω'. Montrer que l'ensemble suivant est une tribu sur Ω

$$\mathcal{T} = \left\{ f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{T}' \right\} \tag{1}$$

▪ **351** ▪

Exercice 2 *(Définir une loi).*
Soit $(a_n)_n$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle.
Trouver λ tel qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant

$$\mathbb{P}(\{n, n+1, \dots\}) = \lambda a_n \tag{2}$$

Indications :

1. Que dire de $\mathbb{P}(\mathbb{N})$
2. Que dire de $\mathbb{P}(\{n\})$
3. Utiliser la contuinuité croissante...

▪ **352** ▪

Exercice 3 *(Majoration exponentielle).*
On considère $(A_n)_n$ une suite d'évènement mutuellement indépendants.
Montrer que la probabilité qu'aucun des A_n ne se réalise est majorée par

$$\exp\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)\right) \tag{3}$$

Indication :

1. Écrire l'évènement avec des complémentaires et utiliser la limite croissante, puis l'indépendance...
2. Utiliser la majoration $1 - x \leq e^{-x}$
3. Attention aux limites !

▪ **353** ▪

Exercice 4 *(Une variante de l'inégalité de Tchebychev).*
Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = m$ et une variance $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$. Fixons $\alpha > 0$.

1. Soit $\lambda > 0$, démontrer
$$\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda) \tag{4}$$
2. Vérifier que
$$\mathbb{E}\left((X - m + \lambda)^2\right) = \sigma^2 + \lambda^2 \tag{5}$$
3. En déduire que
$$\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2} \tag{6}$$
4. Démontrer
$$\mathbb{P}(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2} \tag{7}$$
5. Comparer à l'inégalité de Tchebychev

▪ **354** ▪

Exercice 5 *(Zeta mon amour).*
On définit un espace probabilisé sur $\Omega = \mathbb{N}^*$ par
$$\mathbb{P}(\{n\} = \frac{1}{\zeta(s) n^s} \tag{8}$$
Où $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$.

1. Justifier que c'est bien une loi de probabilité pour $s > 1$.
2. Soit A_n l'évènement « être un multiple de n ». Montrer que les évènements A_p pour p premier sont indépendants dans leur ensemble.
3. Exprimer l'évènement E « n'être multiple d'aucun nombre premier » en fonction des A_p.
4. En utilisant l'indépendance et le théorème de continuité décroissante en déduire
$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \tag{9}$$
5. En déduire une expression de $\zeta(s)$ sous forme de produit infini.

■ **355** ■

Exercice 6 *(Théorème de récurrence de Poincaré).*
Soit (X, T, μ) un espace de probabilité, $f : X \to X$ une application mesurable préservant μ et A un élément de T.

1. On note A_n l'ensemble des points de X qui passent dans A quand on itère f au moins n fois. Écrire cet évènement en fonction de f et de A
2. Montrer que $\mu(A_{n+1}) = \mu(A_n)$ et que $A \subseteq A_0$
3. On note A_∞ l'ensemble des points qui passent une infinité de fois dans A sous l'action de f. Écrire A_∞ en fonction des A_k.
4. En déduire

$$\mu(A_\infty \cap A) = \mu(A) \tag{10}$$

5. Conclure que pour μ-presque tout point x de A, l'orbite $(f_n(x))_n$ repasse une infinité de fois dans A.
6. On considère un gaz idéal contenu dans une boite parallélépipédique V subdivisée en deux parties cubiques $V1$, $V2$ de longueur de côté 10 cm. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, toutes les molécules sont dans $V1$ (par exemple parce que l'on a fait le vide dans $V2$), et on enlève la cloison entre $V1$ et $V2$.

   Déduire du théorème précédent que le gaz doit revenir infiniment souvent dans la partie $V1$.

■ **356** ■

Exercice 7 *(Probas toto).*
Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1 - p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et n
3. Étudier la limite de p_n et conclure

■ **357** ■

Exercice 8 *(Indicatrice d'Euler).*
Soit $n > 1$ fixé. On sélectionne de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \dots, n\}$.
Pour tout entier $m \leq n$ on note A_m l'évènement m divise x, et B l'évènement x est premier avec n.

1. Exprimer B en fonction des A_p pour p diviseur premier de n
2. Pour tout m divisant n, calculer la probabilité de A_m
3. Montrer que les évènements A_p pour p premier sont mutuellement indépendants
4. En déduire la probabilité de B
5. Application : on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. Démontrer que

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{11}$$