Réduction

MP– SEMAINE 18

▪ **397** ▪ TAGS : mp | reduction | trigonalise | crochet | lie |

Exercice 1 *(Crochet de Lie).*

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Si $u, v \in \mathbb{L}(E)$ on pose $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.

1. Supposons $[u, v] = \alpha u$, calculer $[u^p, g]$.
2. En déduire un ensemble de valeurs propres pour l'opérateur $h \mapsto [h, v]$
3. Conclure que u est nilpotente.
4. Montrer que $\ker u$ est stable par v
5. En déduire que u et v ont un vecteur propre commun.
6. En appliquant ce résultat aux transposées, déduire que u et v ont un hyperplan stable commun.

   Indication : $x^T Ay = (A^T x)^T y$...
7. Conclure que u et v sont co-trigonalisables.
8. Adapter le raisonnement précédent pour avoir la même conclusion quand $[u, v] = \alpha u + \beta v$

   Indication : Poser $f = u + \frac{\beta}{\alpha} v$ ...

▪ **398** ▪ TAGS : mp | reduction | trigonalise | crochet | lie |

Exercice 2 *(Méthodes itératives).*

Soit $\| \cdot \|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ On pose $\rho(A) = \sup\{|\lambda| | \lambda \in sp(A)\}$.

1. Soit v un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ Montrer que $v \times v^T$ est non nul.
2. En déduire $\rho(A) \leq \|A\|$
3. Montrer que s'il existe λ tel que $|\lambda| \geq 1$ alors il existe un vecteur tel que $A^n x$ ne converge pas.
4. Montrer que si $\|A\| < 1$ pour une certaine norme matricielle alors $A^n x$ converge pour tout x
5. Soit A une matrice trigonale, calculer DAD^{-1} où $D = Diag(\delta, \delta^2, \ldots, \delta^n)$
6. Soit A une matrice et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une matrice P telle que $\|PAP^{-1}\|_\infty < \rho(A) + \varepsilon$
7. Malheureusement cela ne permet pas de conclure, mais on peut montrer via une méthode similaire $\rho(A) = \inf\{\|A\| \mid \| \cdot \| \text{ norme matricielle }\}$
8. Que dire d'une méthode de calcul itérative de type $u_{n+1} = Au_n$ par rapport au rayon spectral de A ?

▪ **346** ▪ TAGS : mp | polynome | endomorphisme | algebre | lineaire |
Exercice 3 *(Valeur propre commune).*
Soient A et B deux matrices carrées.

1. Soit $P \neq 0$ tel que $AP = PB$, montrer que A et B ont une valeur propre commune
   Sous questions :
   (a) Que dire des polynômes en A et en B ?
   (b) Quel est le lien entre valeurs propres et racines de polynômes ?
   (c) Quelle est l'écriture factorisée du polynôme caractéristique ?
   (d) En déduire que $(B - \lambda_i I)$ est non inversible pour un certain i
2. Montrer la réciproque
   Sous questions :
   (a) Soit v, λ un élément propre commun à A et B, décomposer l'espace en somme directe.
   (b) Définir P sur la décomposition de manière à ce que $Pv = v$ et $Px = 0$ autrement
   (c) Conclure que P convient.

▪ **389** ▪ TAGS : mp | reduction | matrice | polynome | caracteristique |
Exercice 4 *(Valeurs propres et produit de Kronecker).*
On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{pmatrix} (= A_1 \otimes A_n) \tag{1}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A_n pour tout $n \geq 1$

   Indication : Calculer le polynôme caractéristique par bloc
2. Calculer le déterminant de A_n
3. Déterminer la trace de A_n
4. Quel est le rang de A_n ?

▪ **390** ▪ TAGS : mp | reduction | suite | kronecker | diagonalisabilite |
Exercice 5 *(Diagonalisabilité d'un produit de kronecker).*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 1$ montrer que la matrice B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \tag{2}$$

Indication : Que dire des polynômes en B ?

▪ **392** ▪ TAGS : mp | reduction | kronkecker | polynome |
Exercice 6 *(Théorème de Kronecker).*

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et de degré n. Existe-t-il une matrice M à coefficients entiers dont le polynôme caracrésitique est P ?
2. Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients entiers avec pour racines $(\lambda_i)_i$ comptées avec multiplicité. Considérons $q \geq 1$
   Montrer que le polynôme suivant est à coefficients entiers
   $$P_q = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^q) \tag{3}$$
3. Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients entiers dont toutes les racines sont de module inférieur à 1.
   — Montrer qu'il y a un nombre fini de polynômes P_q
   — En déduire que les racines de P non nulles sont des racines de l'unité.

▪ **393** ▪ TAGS : mp | spectre | reduction | operateurs |
Exercice 7 *(Une équation matricielle).*

1. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on pose
   $$\sin(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} \tag{4}$$
   Justifier l'existence d'une telle matrice
2. Calculer $\sin A$ dans le cas où A est diagonale
3. Calculer $\sin A$ dans le cas où A est trigonale
4. Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant l'égalité suivante ?
   $$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$