Programmation 1

TD n°7

Emilie Grienenberger

14 novembre 2019

$$\frac{}{\rho \vdash x := e \Rightarrow \rho[x \mapsto [\![e]\!]\rho]}\ (:=) \qquad \frac{}{\rho \vdash \texttt{skip} \Rightarrow \rho}\ (\texttt{Skip})$$

$$\frac{\rho \vdash c_1 \Rightarrow \rho' \quad \rho' \vdash c_2 \Rightarrow \rho''}{\rho \vdash c_1; c_2 \Rightarrow \rho''}\ (\texttt{Seq})$$

$$\frac{\rho \vdash c_1 \Rightarrow \rho'}{\rho \vdash \texttt{if } e \texttt{ then } c_1 \texttt{ else } c_2 \Rightarrow \rho'}\ (\texttt{if}_1) \text{ si } [\![e]\!]\rho \neq 0 \qquad \frac{\rho \vdash c_2 \Rightarrow \rho''}{\rho \vdash \texttt{if } e \texttt{ then } c_1 \texttt{ else } c_2 \Rightarrow \rho'}\ (\texttt{if}_2) \text{ si } [\![e]\!]\rho = 0$$

$$\frac{\rho \vdash c \Rightarrow \rho' \quad \rho' \vdash \texttt{while } e \texttt{ do } c \Rightarrow \rho''}{\rho \vdash \texttt{while } e \texttt{ do } c \Rightarrow \rho''}\ (\texttt{while}) \text{ si } [\![e]\!]\rho \neq 0 \qquad \frac{}{\rho \vdash \texttt{while } e \texttt{ do } c \Rightarrow \rho}\ (\texttt{while}_{\text{fin}}) \text{ si } [\![e]\!]\rho = 0$$

FIGURE 1 – La sémantique opérationnelle à grands pas de IMP.

$$\begin{aligned}
(x := e \cdot C, \rho) &\to (C, \rho[x \mapsto [\![e]\!]\rho]) \\
(\texttt{skip} \cdot C, \rho) &\to (C, \rho) \\
(c_1; c_2 \cdot C, \rho) &\to (c_1 \cdot c_2 \cdot C, \rho) \\
(\texttt{if } e \texttt{ then } c_1 \texttt{ else } c_2 \cdot C, \rho) &\to (c_1 \cdot C, \rho) \quad \text{si } [\![e]\!]\rho \neq 0 \\
(\texttt{if } e \texttt{ then } c_1 \texttt{ else } c_2 \cdot C, \rho) &\to (c_2 \cdot C, \rho) \quad \text{si } [\![e]\!]\rho = 0 \\
(\texttt{while } e \texttt{ do } c \cdot C, \rho) &\to (c \cdot \texttt{while } e \texttt{ do } c \cdot C, \rho) \quad \text{si } [\![e]\!]\rho \neq 0 \\
(\texttt{while } e \texttt{ do } c \cdot C, \rho) &\to (C, \rho) \quad \text{si } [\![e]\!]\rho = 0
\end{aligned}$$

FIGURE 2 – La sémantique opérationnelle à petits pas de IMP.

Théorèmes petit pas

Déterminisme la réduction est déterministe

Progrès les seules configurations ne possédant pas de successeur sont de la forme (ε, ρ)

$$\frac{}{(x,\rho) \to_{pp} (\widehat{\rho(x)},\rho)}\ (\texttt{Var}) \qquad \frac{(e_1,\rho) \to_{pp} (e_1',\rho)}{(e_1 \dot{+} e_2,\rho) \to_{pp} (e_1' \dot{+} e_2,\rho)}\ (+_\ell)$$

$$\frac{(e_2,\rho) \to_{pp} (e_2',\rho)}{(\dot{n} \dot{+} e_2,\rho) \to_{pp} (\dot{n} \dot{+} e_2',\rho)}\ (+_r) \qquad \frac{}{(\dot{n} \dot{+} \dot{m},\rho) \to_{pp} (\widehat{n+m},\rho)}\ (+_{\text{fin}})$$

$$\frac{(e,\rho) \to_{pp} (e',\rho)}{(\dot{-}e,\rho) \to_{pp} (\dot{-}e',\rho)}\ (-) \qquad \frac{}{(\dot{-}\dot{n},\rho) \to_{pp} (\widehat{-n},\rho)}\ (-_{\text{fin}})$$

FIGURE 3 – Sémantique opérationnelle à petits pas des expressions arithmétiques.

Théorèmes grand pas

Déterminisme l'arbre de dérivation d'un jugement est guidé par la syntaxe et donc unique.

Correction s'il existe une dérivation $\rho \vdash c \Downarrow \rho_\infty$ alors il existe une dérivation $(c \cdot \varepsilon, \rho) \to^* (\varepsilon, \rho_\infty)$

Adéquation s'il existe une dérivation $(c \cdot \varepsilon, \rho) \to^* (\varepsilon, \rho_\infty)$ alors il existe une dérivation $\rho \vdash c \Downarrow \rho_\infty$

1 Sémantiques opérationnelles

Exercise 1 : Sémantiques opérationnelles

Soit c un programme et ρ un environnement. Montrer l'équivalence entre :

1. Il existe une dérivation infinie de $(c \cdot \varepsilon, \rho)$
2. Il n'existe pas de ρ_∞ tel que $\rho \vdash c \Downarrow \rho_\infty$.

Exercise 2 :

La sémantique opérationnelle définie à l'exercice 1 peut paraître artificielle. En effet, elle ne décrit pas comment sont calculées les expressions.

On s'intéresse à une sémantique opérationnelle des expressions à petits pas, comme figure 3.

1. Donnez une preuve de

$$((x \dot{+} (\dot{-}y)) \dot{+} \dot{2}, \rho[x \mapsto 3, y \mapsto 2]) \to_{pp}^* (\dot{3}, \rho[x \mapsto 3, y \mapsto 2])$$

2. Énoncer puis prouver un théorème de progrès
3. Énoncer puis prouver un théorème de déterminisme
4. Montrer la correction de la sémantique dénotationnelle
5. Montrer l'adéquation de la sémantique dénotationnelle

2 Treillis et ordres

Inf-demi-treillis complet

Un *inf-demi-treillis complet* est un ensemble ordonné $(X, \leq)$ non vide tel que toute famille $F \subseteq X$ a une borne inférieure $\bigwedge F$.

Exercise 3 : Treillis complets

1. Montrer qu'un inf-demi-treillis complet est en fait un treillis complet.
2. Montrer que l'ensemble des parties d'un ensemble A quelconque est un treillis complet.
3. Justifier que l'ensemble des ouverts $\mathcal{O}$ d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est un treillis complet. Quel est le sup d'une famille F d'ouverts ? Quel est son inf ?

Knaster-Tarski

Soit $(X, \leq)$ un treillis complet et $f : X \to X$ une fonction monotone. Alors l'ensemble des points fixes de f est un treillis complet non vide.

Exercise 4 : Une preuve de Knaster-Tarski

Soit f une fonction monotone de X dans X où X est un treillis complet.

1. Montrez que f possède un plus grand et un plus petit point fixe.
2. En déduire que l'ensemble des points fixes est un treillis complet.

Exercise 5 : Utilisation de Knaster-Tarski

Démontrez le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein : si A et B sont deux ensembles tels qu'il existe deux injections f et g respectivement de A dans B et de B dans A, alors A est en bijection avec B. *Indication : faire un dessin avec deux patates, tout serait si beau si on pouvait trouver X tel que $f(X)^c$....*

3 DCPOs

Rappel sur les familles dirigées

Une famille D non vide d'un ensemble $(X, \leq)$ est dirigée si et seulement si

$$\forall (x, y) \in D, \exists z \in D, z \geq x \wedge z \geq y$$

Rappels sur les DCPOs

Un DCPO est un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$ tel que toute famille dirigée possède un sup. Un DCPO est *pointé* s'il existe un élément minimal.

Exercise 6 : Qui est quoi ?

Dessinez les ensembles suivants et indiquez lesquels sont des DCPOs, lesquels sont des treillis complets, lesquels sont pointés, le tout *en justifiant.*

1. $\mathbf{1} = \{\perp\}$.
2. $\mathbf{Bool}_\perp = \{0, 1, \perp\}$ avec $x < y$ si et seulement si $x = \perp$ et $y \neq \perp$.
3. $\mathbb{N}$ avec l'ordre usuel.
4. $\omega + 1$ avec l'ordre usuel.
5. $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre produit.
6. $\{[x, y] \mid x, y \in I, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$ où $I = [0, 1]$.
7. $\{[x, y] \mid x, y \in I \cap \mathbb{Q}, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$ où $I = [0, 1]$.

Exercise 7 : Knaster-Tarski VS Scott

On munit $[0, 1]$ de l'ordre usuel qui le rend DCPO et complet en tant que treillis.

1. Montrez qu'une fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ monotone admet un point fixe
2. Montrez que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est une fonction Scott-continue alors elle possède un point fixe. De plus, ce point fixe est limite de la suite $x_i \triangleq f^i(0)$.

3. Montrez l'équivalence entre les deux propositions suivantes pour une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ monotone.
   - f préserve les sup
   - f est continue à gauche sur $[0,1]$
4. En déduire que $\sup f^i(0)$ n'est pas toujours un point fixe de f en exhibant un contre-exemple.