Programmation 1

TD n°9

Aliaume Lopez

26 novembre 2019

♻ : reprise d'un exercice ! : exercice de compréhension
👍 : exercice fondamental de cours 🏆 : une solution complète par mail = un gâteau

Exercise 1 : Quelques aides

1. Sortir une feuille pour noter la correction.
2. Ne pas attendre la correction pour réfléchir sur une feuille.
3. Ne pas hésiter à demander à son voisin, ou mieux, au chargé de TD.
4. Rédiger et ne pas se contenter d'avoir une idée.

♻ **Exercise 2 : Utilisation de Knaster-Tarski**

Démontrez le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein : si A et B sont deux ensembles tels qu'il existe deux injections f et g respectivement de A dans B et de B dans A, alors A est en bijection avec B. *Indication : faire un dessin avec deux patates, tout serait si beau si on pouvait trouver X tel que $f(X)^c$....*

1 DCPOs

Rappel sur les familles dirigées

Une famille D non vide d'un ensemble $(X, \leq)$ est dirigée si et seulement si

$$\forall (x, y) \in D, \exists z \in D, z \geq x \land z \geq y$$

Rappels sur les DCPOs

Un DCPO est un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$ tel que toute famille dirigée possède un sup. Un DCPO est *pointé* s'il existe un élément minimal.

👍 **Exercise 3 : Qui est quoi ?**

Dessinez les ensembles suivants et indiquez lesquels sont des DCPOs, lesquels sont des treillis complets, lesquels sont pointés, le tout *en justifiant*.

1. $\mathbf{1} = \{\bot\}$.
2. $\mathbf{Bool}_\bot = \{0, 1, \bot\}$ avec $x < y$ si et seulement si $x = \bot$ et $y \neq \bot$.
3. $\mathbb{N}$ avec l'ordre usuel.
4. $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec l'ordre usuel.
5. $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre produit.
6. $\{[x, y] \mid x, y \in I, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$ où $I = [0, 1]$.
7. $\{[x, y] \mid x, y \in I \cap \mathbb{Q}, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$ où $I = [0, 1]$.

2 Topologie

Topologie

Une topologie τ sur un ensemble X est un ensemble de parties de X qui vérifie

1. τ est stable par intersection finie.
2. τ est stable par union quelconque.
3. τ contient l'ensemble X.
4. τ contient l'ensemble $\emptyset$.

On dira alors d'un élément de τ qu'il est *ouvert*. Le complémentaire d'un ouvert est par définition un ensemble *fermé*.

Fonction continue

Une fonction $f : X \to Y$ est *continue* de (X, τ) vers (Y, θ) si et seulement si

$$\forall U \in \theta, f^{-1}(U) \in \tau \tag{3}$$

Topologie de Scott

Soit $(D, \leq)$ un DCPO. Une partie $U \subseteq D$ est appellée un *ouvert de Scott* si et seulement si elle vérifie

1. U est clos vers le haut :
$$\forall x, \forall y. \quad x \in U \wedge x \leq y \implies y \in U \tag{4}$$
2. U est inaccessible par le bas :
$$\forall E \text{ dirigée} \qquad \sup E \in U \implies E \cap U \neq \emptyset \tag{5}$$

Exercise 4 : Topologie de Scott

1. Montrer que la topologie de Scott est une topologie.
2. Montrer qu'un fermé de D est clos par le bas et par supremum de famille dirigée.
3. Montrer que $\downarrow x \triangleq \{y \in D \mid y \leq x\}$ est un fermé de D pour la topologie de Scott.
4. Montrer que les fonctions continues pour la topologie de Scott sont les fonctions Scott-continues.

Exercise 5 : Booléens

On considère $\mathbf{Bool}_\perp = \{0, 1, \perp\}$ ordonné comme précédement.

1. Quels sont les ouverts de Scott de $\mathbf{Bool}_\perp$? Les fermés ?
2. Exhibez toutes les fonctions monotones de $\mathbf{Bool}_\perp$ dans $\mathbf{Bool}_\perp$.
3. Soit D un DCPO, et f une fonction monotone de $\mathbf{Bool}_\perp$ dans D. Montrez que f est Scott-continue.
4. Dessinez $\mathbf{Bool}_\perp \times \mathbf{Bool}_\perp$ (ordre produit).
5. Énumérez les fonctions Scott continues f telle que f restreinte à $\{0, 1\}$ définit la fonction booléenne « ou ».
6. En voyant $\perp$ comme « un calcul divergent », donnez une interprétation calculatoire de chacun des prolongements à $\mathbf{Bool}_\perp$ de la fonction booléenne « ou ».

Exercise 6 : Topologie et séparation

1. Montrer que si la topologie de Scott sur $(X, \leq)$ est séparée (i.e. pour tout $x \neq x'$ il existe deux voisinages ouverts U et U' respectivement de x et de x' dont l'intersection est vide) alors $\leq$ est en réalité l'égalité sur X.
2. Montrer que la topologie de Scott est T_0, c'est-à-dire si pour tout $x \neq x'$ il existe un voisinage ouvert de x qui en contient pas x' *ou l'inverse !*.

3 Un peu de sémantique

Exercise 7 : Un petit langage

On considère le langage $\{\star, \bullet\}$ équipé de la sémantique à petits pas suivante :

$$\begin{aligned} X \star \bullet Y &\to XY && \text{si } \exists n \geq 0, X = \star^n \\ X \bullet \star Y &\to XY && \text{si } \exists n \geq 0, X = \bullet^n \end{aligned}$$

1. Énoncer puis prouver un théorème de déterminisme.
2. On considère le DCPO $\{0, 1\}$ équipé de l'ordre plat et la sémantique suivante

$$\begin{aligned} [\![\varepsilon]\!]_2 &= 0 \\ [\![aX]\!]_2 &= 1 - [\![X]\!]_2 && \text{si } a \in \{\star, \bullet\} \end{aligned}$$

   Montrer que cette sémantique est correcte par rapport à la sémantique à petits pas.
3. Même question pour le DCPO des entiers relatifs équipé de l'ordre plat et la sémantique suivante

$$\begin{aligned} [\![\varepsilon]\!]_{\mathbb{Z}} &= 0 \\ [\![\star X]\!]_{\mathbb{Z}} &= 1 + [\![X]\!]_{\mathbb{Z}} \\ [\![\bullet X]\!]_{\mathbb{Z}} &= -1 \ + [\![X]\!]_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

4. On se donne la notion d'équivalence observationnelle suivante :

$$A \equiv B \triangleq \forall C[\cdot], C[A] \to^* \varepsilon \iff C[B] \to^* \varepsilon$$

   (a) Montrer que c'est une relation d'équivalence
   (b) Les sémantiques dénotationnelles sont-elles complètement abstraites ?