Automates avancés

Master 1 II et MI

Devoir surveillé du 24 mars 2009 (12h30-14h30)
Documents autorisés : notes manuscrites;
la somme sera divisée par une constante
le sujet est recto-verso.

1 Rappelez-vous, le pumping lemma... $\boxed{1+3+6}$

On considère les [ensembles de] nombres binaires qui correspondent aux puissances de

1. 8
2. 10
3. 3

Est-ce qu'ils correspondent aux langages réguliers ? Justifiez bien vos réponses.

2 Appliquez des algos de cours $\boxed{2+4}$

1. Construisez un BDD (ordonné réduit) pour la fonction $G : \{0,1\}^7 \to \{0,1\}$ définie comme suit
$$G(x_1,\ldots,x_7) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 > x_6+x_7 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
2. Appliquez l'algorithme d'apprentissage d'Angluin au langage suivant sur $\{a,b\}$:

   Tous les mots qui commencent par a et qui ont les b sur toutes les positions paires.

3 Adaptez les méthodes de cours $\boxed{2+6}$

1. On considère les mots de l'alphabet $\{0,1,2,\ldots,9\}^2$. Un tel mot sera interprété comme deux entiers naturels x, y en système décimal (le digit le moins important d'abord) écrit sur 2 pistes. Ainsi, pour représenter $x = 981, y = 1962$ on écrira $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 8 & 9 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 1 \\ \hline \end{array}$ Trouvez un automate qui reconnaît tous les mots qui correspondent à x, y tels que $2x = y$. Expliquez brièvement son principe de fonctionnement.
2. Démontrez qu'il existe un langage régulier fini G sur $\{a,b\}$ tel que
   - tous les mots de G contiennent < 100 lettres ;
   - ET tout automate qui reconnaît G contient > 1000000 états

4 Les congruences $\boxed{2+2+2+4+3+2}$

On cherche un algorithme pour résoudre les systèmes de congruences linéaires entières avec une inconnue. Un tel système a la forme suivante (avec x l'inconnue, c_i, m_i des entiers donnés) :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & \equiv & c_1 (\bmod m_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ x & \equiv & c_k (\bmod m_k) \end{array}\right. \tag{1}$$

On propose de représenter x en système unaire (comme séquence de x chiffres 1).

1. Montrez que l'ensemble de solutions d'une congruence $x \equiv c (\bmod m)$ correspond à un langage régulier.
2. Montrez que l'ensemble de solutions du système (1) correspond à un langage régulier.
3. Déduisez un algorithme pour décider si le système (1) a une solution.
4. Comment caractériser l'ensemble de toutes ses solutions ?
5. Est-il possible de suivre le même schéma en utilisant le système binaire ? Détaillez.
6. Illustrez vos raisonnements pour tous les points précédents sur l'exemple :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & \equiv & 1 (\bmod 2) \\ x & \equiv & 2 (\bmod 3) \end{array}\right.$$