

TD: Systèmes de réécriture - indécidabilité (Exam2002)

Rappel

Proposition 1 *Le problème Arrêt2C(M,x): “Est-ce que la machine à 2 compteurs M sur l’entrée x s’arrête (sans erreurs)? ” est indécidable.*

Définitions

Soit Σ un alphabet fini. Un système de réécriture sur l’alphabet Σ est un ensemble fini Π de règles de la forme $v \rightarrow w$ (où v et w sont des mots sur l’alphabet Σ). On dit qu’un mot B est dérivable de A s’il peut être obtenu en appliquant plusieurs fois les règles de Π à des sous-mots (notation: $A \xrightarrow{*} B$).

Le but de l’exercice consiste à étudier la décidabilité du problème Dérivable(Π, A, B): “Est-ce que $A \xrightarrow{*} B$ dans Π ”.

Questions

1. **1** **Deux instances du problème.** Dans le système $\{ab \rightarrow ba; a \rightarrow aa\}$
 - est-ce que $aab \xrightarrow{*} aaaba$?
 - est-ce que $aba \xrightarrow{*} ababa$?

Si la réponse est positive donner la dérivation, sinon prouver qu’il n’y en a pas.

2. **5** **Simulation.** Prouver l’indécidabilité du problème Dérivable(Π, A, B).

Indications pour la question 2

La méthode suggérée est de simuler les machines à 2 compteurs et d’utiliser Proposition 1 - voir Annexe.

Pour une M_{à2C} M il faut construire un système de réécriture $\Pi(M)$ qui simule cette machine. On pourra représenter la configuration $c = (q, x, y)$ par le mot $\hat{c} = 1^x q 1^y$. Pour finir la preuve il reste à faire des étapes suivantes:

- représenter chaque instruction in de la M_{à2C} par une ou plusieurs règles \hat{in} de réécriture. Il faut trouver les règles qui correspondent à chaque type d’instruction de la M_{à2C}. En particulier pour l’instruction **stop** effacer tout.
- prouver la correction de cette traduction:
 - pour les premiers types d’instruction in (autres que **stop**) montrer que $c \xrightarrow{in} c'$ dans M si et seulement si $\hat{c} \xrightarrow{\hat{in}} \hat{c}'$ dans $\Pi(M)$.
 - pour l’instruction **stop** montrer que c est une configuration d’arrêt de M si et seulement si $\hat{c} \xrightarrow{*} \varepsilon$ en utilisant les règles de type **stop** uniquement.
 - déduire que Arrêt2C(M,x) si et seulement si $1^x q \xrightarrow{*} \varepsilon$ dans $\Pi(M)$.
- déduire l’indécidabilité du problème Dérivable(Π, A, B).