

SUJET DE STAGE

—

**ASSISTANTS DE PREUVE ET  
MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE**

proposé par François Puitg

25 septembre 2002

Université Joseph Fourier, Laboratoire LEIBNIZ – CNRS – IMAG,  
Équipe ATINF (ATELIER d'INFérence)  
46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble cedex  
mail : [puitg@imag.fr](mailto:puitg@imag.fr)  
web : [www-leibniz.imag.fr/ATINF/Francois.Puitg](http://www-leibniz.imag.fr/ATINF/Francois.Puitg)  
bureau : D09 (bât. Hitella)  
tél. : 04 76 57 45 68  
fax : 04 76 57 46 02

## Contexte scientifique du stage

Jadis réservées aux environnements hostiles comme l'espace ou le nucléaire, où erreur est synonyme de pertes humaines, les méthodes mathématiques pour l'informatique ont peu à peu trouvé d'autres champs d'application durant la dernière décennie. Dans la quête de spécifications et de programmes « zéro défaut » décrivant des systèmes logiciels et matériels « parfait », les méthodes formelles suscitent aujourd'hui un enthousiasme croissant dans le monde industriel et les laboratoires de recherche. Ce stage se situe à la jonction de trois domaines, la modélisation géométrique, l'assistantat à la preuve et la démonstration automatique, succinctement présentés ci-après.

## Assistants à la preuve

*En passant, puis-je demander au lecteur de ce chapitre qui croît avoir trouvé une démonstration du dernier théorème de Fermat de ne pas me l'envoyer. J'ai déjà examiné plus de 100 tentatives infructueuses, et j'en ai assez. L'une d'elles m'a demandé trois semaines, il y a plusieurs années. Je ne parvenais pas à découvrir la faute que je pressentais. En désespoir de cause je confiai le manuscrit à une jeune élève très brillante, et elle découvrit l'erreur en une demi-heure.*

*Eric Temple Bell dans : I. Stewart, « Les mathématiques », Belin*

Les assistants de preuves sont des logiciels qui visent à aider à la démonstration de théorèmes. Ils fournissent un cadre logique permettant de construire et de vérifier une preuve. Ces systèmes sont de plus en plus utilisés, que ce soit par les mathématiciens ou par les informaticiens. Toutefois, leur principal inconvénient est que le processus de construction de la preuve est laissé entièrement à la charge de l'utilisateur, par le biais des tactiques. Une *tactique* implante une étape du raisonnement, et constitue ainsi un vecteur du dialogue interactif avec

le démonstrateur. Elle peut être prédéfinie, ou programmée par l'utilisateur pour des besoins spécifiques.

L'assistant de preuve utilisé au cours de ce stage sera le logiciel Coq [1], un projet de recherche commun à l'INRIA Rocquencourt, l'ENS Lyon et le CNRS. Coq est utilisé activement par de nombreux laboratoires de recherche, mais aussi dans un contexte industriel : on peut citer notamment Bull, France Télécom, Dassault Aviation, le projet VIP (Verified Internet Protocol) ...

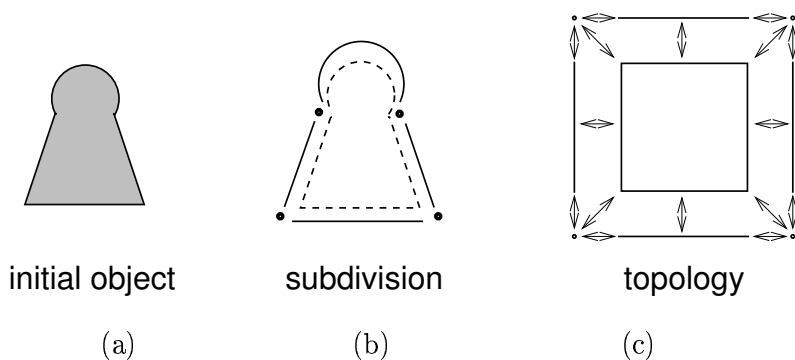
## Modélisation géométrique

*En un sens, alors, si les géomètres métriques étudient les aspects temporels des objets géométriques, les topologistes, eux, en étudient l'âme. L'« âme » d'un objet est la réunion de ses propriétés invariantes topologiquement, car c'est ce qui fait, plus que tout autre chose, l'essence de cet objet. En faisant le point sur ce qu'il en est des choses qui demeurent même lorsque tout en elles est affecté par le changement, ou est susceptible de l'être, la topologie étudie les aspects les plus fondamentaux de l'existence géométrique.*

*M. Guillen, « Des ponts vers l'infini », Albin Michel.*

Le but de la modélisation géométrique est de décrire des objets et des opérations géométriques. Clairement, une représentation explicite – pouvant contenir des infinités de points – est impossible. Bien que plus facile à mettre en oeuvre et plus adaptée aux calculs, une représentation implicite – comme par exemple une équation paramétrique – reste difficile à manipuler sur un ordinateur. De plus, ces approches ne distinguent pas les structures topologiques sous-jacentes des informations purement géométriques – le plongement – conduisant à des descriptions incomplètes et imprécises qui compliquent voire rendent impossible l'axiomatisation. Au contraire, la représentation par les bords (boundary representation, ou BREP), fait ce distinguo.

Historiquement, la BREP a été introduite pour pouvoir représenter des solides façonnables sur des machines-outils, c'est-à-dire des solides dont le bord forme une surface fermée orientable. La topologie de ce bord est alors définie par une subdivision en cellules de dimension 0, 1 et 2 (sommets, arêtes, faces) et des relations d'incidence et d'adjacence entre elles. Puis, un modèle de plongement associe par exemple les sommets (topologiques) avec des points (géométriques), les arêtes avec des segments de courbes et les faces avec des surfaces. Sur la figure suivante, le bord du « solide » initial (a) est subdivisé en cellules (b). Les doubles flèches symbolisent les relations d'incidence et d'adjacence (c). Le plongement n'est pas représenté.



Il existe maintenant de nombreux modèles mathématiques pour la BREP, s'étendant des subdivisions de surfaces orientables fermées aux subdivisions d'espaces à  $n$  dimensions, orientables ou non, fermés ou non . . . Parmi tous ces modèles, les *cartes combinatoires* occupent d'un point de vue historique une position centrale. Elles modélisent de manière assez large, sont capables d'intégrer de la topologie et peuvent être facilement et rigoureusement définies. Si l'on se limite à la dimension 2, elle modélisent des surfaces fermées orientables.

## Démonstration automatique

La déduction automatique consiste à formaliser certaines techniques très puissantes du raisonnement humain comme par exemple l'utilisation de l'analogie, la recherche simultanée de réfutations et de contre-exemples, le raisonnement dans les théories, etc., dans le but d'obtenir une preuve.

L'utilisation de modèles (contre-exemples) en déduction automatique a été dès le début reconnue comme très importante et certains travaux dans ce sens sont considérés parmi les plus marquants du domaine. En particulier, l'utilisation de modèles a très vite été identifiée comme essentielle pour guider la recherche de preuve (Geometry Theorem Proving Machine, résolution sémantique, . . .), pour réfuter des conjectures, prouver l'indépendance d'axiomes, etc. En raison de la difficulté du sujet, ce n'est que depuis les années 90 que la construction automatique de modèles a émergé comme un sous-domaine important de la déduction automatique et que des techniques ont commencé à être proposées pour la construction automatique de modèles. Le projet ATINF a été parmi les pionniers au sein de ce thème, et figure parmi les contributeurs les plus actifs.

## Sujet du stage

Dans sa thèse [2], F. Puitg propose une axiomatisation complète en *Coq* des cartes combinatoires sous forme d'une hiérarchie comportant 232 théorèmes, 40 définitions et plus de 10000 lignes de preuve, dont la lecture demeure réservée aux spécialistes malgré la structuration en propriétés, lemmes et théorèmes fondamentaux. De plus, une axiomatisation de cette envergure reste difficile à mener et à étendre, d'autant plus que le système *Coq* est très peu automatisé. Il semble peu réaliste de vouloir l'élargir à la troisième dimension sans l'aide d'outils permettant par exemple la planification interactive de l'effort de preuve, l'examen des analogies, la programmation de tactiques ad hoc, l'étude de l'axiomatique sur des cas particuliers grâce à la génération automatique de modèles finis, l'élagage de l'arbre de preuve grâce à la construction automatique d'une réfutation (contre-exemple) . . . Ces deux derniers points ont notamment fait l'objet d'un stage de DEA soutenu en juin 2002.

*Le but de ce stage est d'étudier une partie de ce développement formel afin d'élaborer des tactiques Coq d'aide à la preuve dédiées à l'axiomatisation des cartes combinatoires.*

*Dans un premier temps, une familiarisation avec le système Coq – ce qui constitue déjà un travail non négligeable et validable au niveau du stage – semble indispensable. Puis, il s'agira d'analyser les preuves existantes pour isoler les parties de démonstration automatisables et/ou qui se répètent. On passera ensuite à la programmation de tactiques à partir de cette analyse. Enfin, on pourra envisager de nouvelles preuves, par exemple en passant à la troisième dimension, afin de vérifier la pertinence des tactiques définies à l'étape précédente.*

C'est un sujet original et novateur qui n'a à notre connaissance fait l'objet d'aucune étude. Ajoutons qu'un certain nombre de problèmes sur les cartes combinatoires en 3D sont ouverts.

## Collaborations

Du point de vue de la démonstration automatique, ATINF maintient des relations étroites et fructueuses depuis plusieurs années avec la réputée Technische Universität à Vienne. Depuis 2001, un programme d'échange Européen AMADEUS a été initié et plusieurs voyages entrepris.

En ce qui concerne le système **Coq**, ATINF collabore avec le laboratoire de recherche en informatique d'Orsay (LRI)<sup>1</sup>. Celui-ci abrite l'équipe de développement de **Coq** animée par Christine Paulin, qui a montré beaucoup d'intérêt pour notre approche lors de notre visite en juillet 2002. Toute l'équipe s'est montrée disposée à nous aider à développer des tactiques en **Coq**, et plus particulièrement Jean-Christophe Filliâtre, un expert dans les assistants de preuve qui a travaillé aux États-Unis sur PVS (un autre démonstrateur très prisé outre-Atlantique), et est responsable de l'architecture et de l'implantation de la version 7.2 [3] de **Coq**.

Selon la progression du stage, une participation à des groupes de travail au sein de ces structures est envisageable.

## Déroulement pratique du stage

Ce sujet est suffisamment riche pour que la répartition entre analyse et implantation puisse être modulée selon le goût du stagiaire.

Le stagiaire pourra, si il le désire, être accueilli dans un bureau du laboratoire d'accueil de l'équipe ATINF (le Leibniz, dans les locaux de l'INPG avenue Félix Vialet à Grenoble), dans lequel une machine sera mise à sa disposition.

## Références

- [1] The coq proof assistant. <http://coq.inria.fr>.
- [2] F. PUITG. *Preuves en modélisation géométrique par le calcul des constructions inductives*. PhD thesis, LSIIT, Université Louis Pasteur, 18/01/1999.
- [3] The Coq Development Team. *The Coq Proof Assistant Reference Manual V7.2*. INRIA-Rocquencourt, CNRS-ENS Lyon (France), October 2001. <http://coq.inria.fr/doc/main.html>.

---

<sup>1</sup>[www.lri.fr](http://www.lri.fr)