СПИСОК РИСУНКОВ

1 Пример КПС на плоскости 23

2 Абстракция при моделировании МТ. Соответственные состояния $\mathcal{H}$ и $\mathcal{A}$. $(x = 0{,}1220; y = 0{,}2120)$ 23

3 Конечный автомат и его плоская модель 24

4 КПС Ψ, реализующая $\textsc{push}(1, S)$ (число букв $N = 2$) 24

5 КПС П, реализующая $\textsc{pop}(S)$ (число букв $N = 2$) 24

6 Трубы 25

7 Конечный автомат и его трехмерная модель (внутренняя структура элементов Π_i не показана) 25

8 Элемент Ψ^1, моделирующий $\textsc{push}(2, S_1)$ 26

9 Входной порт сепарированного элемента 27

10 Входной порт планарного элемента 28

11 2СМ и ее правильное расширение 28

УДК 62-50

Е.А.Асарин, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва), [1]
О.Малер, д-р философии
(SPECTRE – VERIMAG, Франция) [2]

Дискретно-непрерывные системы: алгоритмический аспект

Работа посвящается связи между дискретными и непрерывными системами. Обсуждается вопрос, когда непрерывная система может служить моделью дискретной. Особое внимание уделяется динамическим системам, задаваемым дифференциальными уравнениями с кусочно-постоянными правыми частями (что типично для непрерывных систем с дискретными регуляторами) — КПС. Показывается, что любую машину Тьюринга можно смоделировать при помощи КПС размерности 3. С другой стороны, в размерности 2 невозможно смоделировать функционирование некоторых конечных автоматов. Во второй части обсуждаются алгоритмические вопросы, связанные с КПС. В [6] был получен алгоритм, позволяющий полностью исследовать поведение КПС на плоскости, в частности, решать для них задачу достижимости. Из приведенных в первой части статьи результатов о моделировании следует алгоритмическая неразрешимость этой задачи для трехмерных КПС.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант #93-012-884.

[2]VERIMAG — совместная лаборатория CNRS, INPG, UJF и VERILOG SA. SPECTRE — проект INRIA.

1. Введение

В последнее время все больше внимания уделяется моделям так называемых гибридных систем, содержащих взаимодействующие дискретные и непрерывные компоненты (см. [5, 8, 7, 2]). Такие системы встречаются всюду, где дискретные регулирующие устройства (компьютеры, микропроцессоры и просто пороговые устройства) сочетаются с непрерывными по своей природе объектами управления. Исследование поведения замкнутых моделей таких систем требует сочетания классических методов теории управления, относящихся к непрерывным системам, с методами информатики, приспособленными к изучению дискретных систем.

В настоящей работе будет в основном исследоваться следующая модель гибридной системы (кусочно-постоянная система или КПС). Пространство состояний $\mathbb{R}^n$ разбивается на конечное число многогранников (возможно, неограниченных). В каждом многограннике задается свой постоянный вектор сноса. Производная вектора состояния системы в каждый момент времени совпадает с вектором сноса в том многограннике, где вектор состояния в этот момент находится.

Для таких систем будет полностью исследован вопрос об алгоритмической разрешимости следующей задачи (задачи достижимости). Известно начальное состояние x_0 системы. Выяснить, попадет ли когда-нибудь вектор состояния системы в данную точку y или в данный многогранник Γ. В [6] приведен разрешающий алгоритм для систем размерности 2, здесь будет показано, что уже для трехмерных систем задача достижимости алгоритмически неразрешима.

Ключом к исследованию вопросов разрешимости является другая тема, рассматриваемая в статье, — моделирование дискретных систем при помощи непрерывных систем вообще и КПС в частности. Показано, что некоторые конечные автоматы не могут быть смоделированы непрерыв-

ной системой на плоскости. В то же время установлено, что при помощи трехмерной КПС можно смоделировать поведение не только любого конечного автомата, но и машины Тьюринга. Проблемы, связанные с моделированием дискретных систем с помощью непрерывных, обсуждались в литературе, см. [3, 4]

Порядок изложения в основной части статьи отличается от приведенного выше. В разделе 2 вводятся точные определения КПС и отношения моделирования между дискретной и непрерывной системой. В последующих двух разделах исследуются непрерывные модели дискретных систем. В разделе 5 исследуются вопросы алгоритмической разрешимости.

Наиболее громоздкие доказательства вынесены в приложение.

2. Основные определения

Некоторые соглашения. Договоримся вначале о некоторых терминах и обозначениях. Как принято в информатике, будем называть *частичной функцией* из множества A в множество B функцию, определенную на подмножестве A и принимающую значения в B. Если при некотором x значение $f(x)$ не определено, то будем писать, что $f(x) = \perp$

Через X всегда будет обозначаться пространство $\mathbb{R}^n$, через T — множество $\mathbb{R}^+$. Время в рассматриваемых непрерывных системах всегда будет принадлежать T.

Аффинной оболочкой множества $A \subset X$ будем называть множество $\mathrm{Aff}(A)$, состоящее из всех точек вида $\mathbf{x} = \sum l_i \mathbf{x}_i$, где $\mathbf{x}_i \in A$, и $\sum l_i = 1$. Множество A *относительно открыто*, если оно открыто в $\mathrm{Aff}(A)$. Например, интервал на плоскости не является открытым множеством, но он относительно открыт. Аналогично определяются *относительно замкнутое* множество и *относительная граница* множества.

Многогранником в $X = \mathbb{R}^n$, будем называть пересечение конечного чи-

сла открытых и замкнутых полупространств.

Дискретные системы. Пусть Q - не более чем счетное множество "состояний". Последовательность состояний — это функция $\sigma : \mathbb{N} \to Q$. Безвходовая дискретная система (*Д-система*) — это пара $\mathcal{A} = (Q, \delta)$, где Q — множество состояний, а $\delta \subset Q \times Q$ — отношение переходов. *Траектория* такой системы с начальным условием $q \in Q$ — это последовательность состояний $\sigma = q[0], q[1], \ldots$, для которой $q[0] = q$ и для всех $i \geq 0$ выполнено равенство $(q[i], q[i+1]) \in \delta$. Множество всех траекторий с начальным условием $q \in Q$ будем обозначать через $L(\mathcal{A}, q)$.

Заметим, что в эту общую схему укладываются (недетерминированные) конечные автоматы, стековые (магазинные) автоматы и даже машины Тьюринга.

Непрерывные системы. Будем рассматривать непрерывные системы такого вида.

Определение 1. Назовем *H-системой* пару $\mathcal{H} = (X, f)$ где $X = \mathbb{R}^n$ — пространство состояний, а f — частичная функция из X в X. Функция f задает поле скоростей системы, т.е. правую часть дифференциального уравнения, задающего динамику системы. Точнее, будем называть функцию $\xi : T \to X$ траекторией $\mathcal{H}$, начинающейся в $\mathbf{x}_0 \in X$, если $\xi(0) = \mathbf{x}_0$, и при всех t значение функции $f(\xi(t))$ определено и совпадает с правой производной $\xi(t)$.

Будем обозначать множество всех траекторий, начинающихся в $\mathbf{x} \in X$, через $M(\mathcal{H}, \mathbf{x})$. H-система обладает свойством единственности (детерминированности), если из каждой точки $\mathbf{x}$ начинается не более одного решения. В этом случае множество $M(\mathcal{H}, \mathbf{x})$ содержит не более одного элемента.

Особое внимание будет уделяться особому виду H-систем - системам с кусочно постоянным полем скоростей или КПС.

Определение 2. КПС-системой называется Н-система $\mathcal{H} = (X, f)$, где f — частичная функция из X в X, обладающая следующими свойствами. Область значений f — конечное множество векторов $C \subset X$, и для каждого $\mathbf{c} \in C$ множество $f^{-1}(\mathbf{c})$ есть конечное объединение многогранников.

Иными словами, чтобы задать КПС, следует разбить часть пространства на многогранные "зоны" и приписать каждой зоне свой вектор скорости $\mathbf{c}$. Траектории таких систем суть ломаные с точками излома на относительных границах зон. Наши определения подобраны так, чтобы КПС обладали свойством единственности. Пример КПС приведен на рис. 1.

Рис. 1

Моделирование. Для того, чтобы установить связь между Н- и Д-системами нам потребуется сначала перейти от непрерывных состояний к дискретным. Введем следующее понятие абстракции. Пусть, как и ранее $X = \mathbb{R}^n$, а Q — не более чем счетное множество.

Определение 3. Назовем *абстракцией* частичную функцию $\varphi : X \to Q$, для которой при любом $q \in Q$ множество $\varphi^{-1}(q)$ выпукло и относительно открыто. Абстракцию назовем *многогранной*, если множества $\varphi^{-1}(q)$ к тому же являются многогранниками.

Пусть φ — это абстракция, а $\xi : T \to X$ — непрерывная функция ("траектория"). Тогда этой функции соответствует некоторая последовательность состояний — сигнатура. Сформулируем это строго. Сначала проведем дискретизацию по состоянию. Назовем φ-абстракцией ξ функцию $\eta : T \to Q \cup \{\perp\}$, задаваемую равенством $\eta(t) = \varphi(\xi(t))$ (напомним, что значение функции равно $\perp$, когда она не определена в данной точке). В соответствии с нашими определениями, если функция $\varphi(\xi(t))$ изменяется от q_1 до q_2, то между этими значениями она обязательно примет "неопределенное" значение $\perp$. После дискретизации по пространству проведем дискретизацию по времени.

Определение 4. Пусть ξ — траектория, а η — ее φ-абстракция. φ-

сигнатурой (со временем) ξ назовем последовательность $\tau[i] = (\sigma[i], l[i], u[i])$ (где $\sigma[i] \in Q$, $l[i], u[i] \in T$), определяемую равенствами

1. $l[i] = \inf\{t > u[i-1] : \eta(t) \neq \perp\}$;
2. $u[i] = \inf\{t > l[i] : \eta(t) = \perp\}$;
3. $\eta(t) = q[i]$ для какого-нибудь (и любого) $t \in (l[i], u[i])$

Получающуюся при этом последовательность состояний σ_i назовем $\varphi-$*сигнатурой (без времени)* траектории ξ и обозначим через $\varphi(\xi)$.

Разумеется, при некоторых ξ и φ возможны патологические ситуации, когда по тем или иным причинам сигнатура является конечной последовательностью.

После введения понятия сигнатуры можно наконец определить отношения моделирования между Н- и Д-системами. Итак, пусть даны Д-система $\mathcal{A}$, Н-система $\mathcal{H}$ и абстракция φ. Начнем с определения, означающего примерно следующее: сигнатура каждой траектории системы $\mathcal{H}$ является траекторией системы $\mathcal{A}$.

Определение 5. Н-система $\mathcal{H}$ *согласована* с Д-системой $\mathcal{A}$ при помощи абстракции φ, если из условия $\varphi(\mathbf{x}) = q$ следует, что для любой траектории $\xi \in M(\mathcal{H}, \mathbf{x}))$ ее φ-абстракция есть траектория $\mathcal{A}$:

$$\varphi(\xi) \in L(\mathcal{A}, q)$$

Этот факт обозначим следующим образом: $\mathcal{H} \preceq_\varphi \mathcal{A}$.

Следующее понятие означает обратное утверждение: каждая траектория системы $\mathcal{A}$ является сигнатурой какой-либо траектории системы $\mathcal{H}$.

Определение 6. Н-система $\mathcal{H}$ *моделирует* Д-систему $\mathcal{A}$ при помощи абстракции φ, если для любой траектории $\sigma \in L(\mathcal{A}, q))$ Д-системы существуют такие точка $\mathbf{x} \in X$ и траектория $\xi \in M(\mathcal{H}, \mathbf{x})$, что $\sigma = \varphi(\xi)$. Этот факт обозначим следующим образом: $\mathcal{A} \preceq_\varphi \mathcal{H}$.

Наконец, если $\mathcal{A} \preceq_\varphi \mathcal{H}$ и $\mathcal{H} \preceq_\varphi \mathcal{A}$, то будем говорить, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$ *эквивалентны* и обозначать это формулой $\mathcal{A} \approx_\varphi \mathcal{H}$. Будем писать, что $\mathcal{A} \preceq \mathcal{H}$

если для некоторой абстракции φ выполнено $\mathcal{A} \preceq_\varphi \mathcal{H}$.

3. Моделирование конечных автоматов

Начнем со следующего положительного результата о моделировании конечных автоматов.

Предложение 1. По каждому конечному автомату эффективно строится эквивалентная ему КПС в $\mathbb{R}^3$. Эквивалентность при этом реализуется при помощи многогранной абстракции.

Оказывается, что размерность 3 необходима для моделирования некоторых конечных автоматов даже более общими, чем КПС, H-системами. Это вытекает из следующего утверждения.

Предложение 2. Если двумерная *детерминированная* (т.е. обладающая свойством единственности) H-система моделирует конечный автомат $\mathcal{A}$, то граф переходов $\mathcal{A}$ планарен.

Следствие 1. Существует конечный автомат, который не моделируется ни одной двумерной детерминированной H-системой.

В качестве такого автомата можно взять любой автомат с непланарным графом.

4. Моделирование машин Тьюринга

В этом разделе (из технических соображений) будет рассматриваться следующий вариант одноленточной безвходовой детерминированной машины Тьюринга (МТ) с алфавитом $\{0; 1; 2\}$. В начальный момент времени лента пуста, т.е. заполнена нулями, за исключением участка конечной длины, содержащего головку и сплошь заполненного цифрами 1 и 2. Предполагается, что проходя через клетку, головка обязательно печатает 1 или 2. Поэтому в любой момент времени конфигурация ленты устроена так же, как и в начале: конечное слово из цифр 1 и 2 (на котором находится

головка) и бесконечные "хвосты" из нулей с обеих сторон. Тем самым, множество Q возможных состояний МТ счетно, и МТ укладывается в общую схему Д-системы. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 (о моделировании МТ). По каждой МТ эффективно строится эквивалентная ей КПС в $\mathbb{R}^3$.

Поясним, не вдаваясь в технические детали (приведенные в приложении), как при этом реализуется абстракция (см. рис. 2). В пространстве $X = \mathbb{R}^3$ каждому внутреннему состоянию МТ p_i отвечает квадрат K_i с размерами 1×1. Пусть МТ находится в состоянии p_i. При этом на ленте левее головки находится последовательность знаков $\ldots, l_n, \ldots, l_2, l_1$, а правее нее (включая клетку под головкой) — $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Вычислим значения соответствующих троичных дробей: $x = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} l_n$ и $y = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} r_n$. Данной конфигурации МТ соответствует точка на квадрате K_i с координатами x и y (относительно левого нижнего угла). Заметим, что получаемая таким образом функция абстракции определена на очень "тощем" (и даже счетном) подмножестве X.

Рис. 2

5. Алгоритмическая разрешимость и неразрешимость

Если дано эффективное описание КПС $\mathcal{H}$ (с рациональными координатами векторов скоростей и вершин многогранников), то проблема достижимости для $\mathcal{H}$ состоит в следующем. Для любой пары точек $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ с рациональными координатами определить, существует ли траектория $\xi \in M(\mathcal{H}, \mathbf{x})$ и такой момент времени $t > 0$, что $\xi(t) = \mathbf{x}'$. Будем обозначать эту проблему через $\mathrm{Reach}(\mathcal{H}, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

В работе [6] установлен следующий результат.

Предложение 3 (Малер – Пнуэли). Для КПС на плоскости проблема достижимости $\mathrm{Reach}(\mathcal{H}, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ алгоритмически разрешима.

В цитируемой работе приведен явный алгоритм, позволяющий по описа-

нию КПС $\mathcal{H}$ и по координатам точек $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ определить, существует ли траектория, ведущая из $\mathbf{x}$ в $\mathbf{x}'$.

Совсем иначе обстоят дела для трехмерных систем. Имеет место следующий факт.

Теорема 2. Существует такая трехмерная КПС $\mathcal{H}_0$ с рациональными координатами векторов скоростей и вершин многогранников, для которой проблема $\mathrm{Reach}(\mathcal{H}_0, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ алгоритмически неразрешима.

Доказательство. Рассмотрим универсальную МТ $\mathcal{A}_0$. В соответствии с теоремой 1 построим КПС $\mathcal{H}_0$, эквивалентную этой МТ. Предположим, что существует алгоритм, позволяющий решать проблему достижимости для $\mathcal{H}_0$. Тогда можно решить следующую проблему: может ли $\mathcal{A}_0$ перейти за конечное число шагов из данной конфигурациии q_1 в конфигурацию q_2. Однако эта проблема для универсальной МТ алгоритмически неразрешима. Полученное противоречие доказывает теорему. ∎

ПРИЛОЖЕНИЕ

В приложении будут доказаны приведенные в основной части статьи результаты.

1. Доказательство предложения 2. Пусть двумерная Н-система $\mathcal{H}$ моделирует конечный автомат $\mathcal{A}$ при помощи абстракции φ (см. пример на рис. 3, *A*).

Рис. 3

Каждая траектория автомата является сигнатурой какой-либо траектории КПС $\mathcal{H}$. Рассмотрим любые два состояния $q_i \neq q_j$, для которых выполнено условие $(q_i, q_j) \in \delta$ (т.е. разрешен переход из q_i в q_j). Положим $R_i = \varphi^{-1}(q_i)$ и $R_j = \varphi^{-1}(q_j)$ (эти два множества выпуклы и относительно открыты). Тогда должны существовать точка $\mathbf{x}_{ij} \in R_i$, точка $\mathbf{y}_{ij} \in R_j$ и "отрезок траектории" ξ_{ij} системы $\mathcal{H}$, соединяющий эти две точки (см. рис. 3, *B*), не проходя ни через одну из точек множеств $R_k, k \neq i, j$. В силу детерминированости $\mathcal{H}$, если два таких криволинейных отрезка имеют

общую точку, то дальше они "сливаются".

Внутри каждой области R_i выберем замкнутое выпуклое ограниченное подмножество R'_i, содержащее все точки $\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{y}_{ji}$ (подмножества R'_i обозначены на рис. 3, *B* тонкими линиями). Затем подвергнем плоскость непрерывному отображению, стягивающему каждое из множеств R'_i в точку $\tilde{R}_i$ и взаимно однозначному вне этих множеств (см. рис. 3, *C*). Траектории ξ_{ij} при этом перейдут в кривые $\tilde{\xi}_{ij}$. Наконец, назовем звездой точки $\tilde{R}_i$ множество всех точек, лежащих не менее, чем на двух ведущих в эту точку кривых $\tilde{\xi}_{ji}$. Единственная непустая звезда обозначена на рис. 3, *C* тонкой стрелкой. С помощью непрерывного отображения стянем каждую звезду в точку. Окончательно получим (см. рис. 3, *D*) систему точек и соединяющих эти точки непересекающихся линий на плоскости, являющуюся погружением в эту плоскость графа автомата $\mathcal{A}$ (за исключением переходов вида $(q_i, q_i) \in \delta$). Отсюда следует, что граф автомата $\mathcal{A}$ планарен. ∎

2. Стеки и стековые операции. Будем использовать еще несколько принятых в информатике обозначений. Пусть $\Sigma = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ — конечный алфавит (количество "букв" N до конца этого раздела предполагается фиксированным). Множество всех бесконечных последовательностей $S = s_1, s_2, \ldots$, состоящих из элементов Σ, будем обозначать через Σ^ω. Для $v \in \Sigma$ и $S = s_1, s_2, \ldots \in \Sigma^\omega$ будем обозначать через $v \cdot S$ последовательность $v, s_1, s_2, \ldots$.

Излагаемые ниже методы моделирования недетерминированных конечных автоматов и мащин Тьюринга трехмерными КПС будут основываться на стеках и их моделях. Уточним, о чем идет речь. Содержимое стека над алфавитом Σ — это последовательность $S = s_1, s_2, \ldots \in \Sigma^\omega$. Единственный доступный элемент стека — его вершина s_1 (у наших стеков нет "дна").

К стеку можно применять две (взаимно обратных) операции:

PUSH. Положить в вершину стека элемент $v \in \Sigma$. Формально говоря,

$$\text{PUSH}(v, S) = v \cdot S.$$

POP. Вынуть элемент из вершины стека. Формально говоря,

$$\text{POP}(v \cdot S) = (v, S).$$

Каждому состоянию стека в предлагаемых ниже моделирующих КПС сопоставляется точка на отрезке. Точнее говоря, пусть $\Delta = [LR)$ — параллельный оси x полуинтервал длины 1 ("порт"). Тогда состоянию стека $S = s_1, s_2, \ldots$ соответствует точка на полуинтервале Δ, имеющая координату $r_N(S)$, т.е. находящаяся на расстоянии $r_N(S)$ от точки L. Здесь

$$r_N(S) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i N^{-i}.$$

Напомним, что N — число букв в алфавите. Далее будем опускать индекс, значение которого ясно из контекста, и писать просто $r(S)$ Для однозначности будем дополнительно предполагать, что S не оканчивается на бесконечную последовательность из букв $(N-1)$.

Выясним, как преобразуется $r(S)$, когда стек подвергается одной из стековых операций. Покажем также, как эти преобразования могут быть реализованы при помощи КПС.

2.1. PUSH. Пусть $S' = \text{PUSH}(v, S)$. Тогда $r(S') = (r(S) + v)/N$. При любом v такое преобразование нетрудно реализовать при помощи КПС Ψ,
Рис. 4 конструкция которой ясна из рис. 4. КПС Ψ имеет входной порт In и выходной порт Out. Если траектория входит в Ψ через точку входного порта с координатой $r(S)$, то она выйдет через точку выходного порта с координатой $r(S') = (r(S) + v)/N$.

2.2. POP. Пусть $(S', v) = \text{POP}(S)$. Тогда $r(S') = Nr(S) - v$. Такое преобразование можно реализовать при помощи КПС П, конструкция ко-
Рис. 5 торой ясна из рис. 5. КПС П имеет входной порт In и N выходных портов

Out_k. Если траектория входит в Ψ через точку входного порта с координатой $r(S)$, то она выйдет через точку выходного порта Out_v с координатой $r(S') = Nr(S) - v$.

Ниже нам потребуются не только "активные элементы" Π и Ψ, но и соединительные элементы.

2.3. Трубы. Труба имеет один входной порт In и один выходной порт Out. Основное свойство трубы состоит в следующем. Если траектория входит в трубу через точку порта In с координатой x, то она выйдет через точку порта Out такой же координатой x. Такой элемент нетрудно реализовать в виде системы последовательно соединенных параллелограммов и треугольников, которые не обязательно лежат в одной плоскости (см. рис. 6).

Рис. 6

3. Доказательство предложения 1. Пусть $\mathcal{A} = (Q, \delta)$ — конечный автомат с множеством состояний $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{K-1}\}$ и отношением переходов $\delta \subset Q \times Q$.

Наряду с автоматом $\mathcal{A}$ будем рассматривать детерминированную машину $\mathcal{B}$ с одним стеком, которая, неформально говоря, делает то же самое, что и $\mathcal{A}$. Введем в рассмотрение конечный алфавит $\Sigma = \{0, 1, \ldots, K\}$. Пространством состояний машины $\mathcal{B}$ является $Q \times \Sigma^\omega$. Иными словами, состояние $\mathcal{B}$ — это пара, состоящая из состояния q_i автомата $\mathcal{A}$ и содержимого стека S. На очередном шаге машины $\mathcal{B}$ проделываются следующие действия.

1. Из стека вынимается один элемент v:

$$(v, S') = \text{POP}(S).$$

2. Если переход автомата $\mathcal{A}$ в состояние q_v разрешен (т.е. $(q_i, q_v) \in \delta$), то машина $\mathcal{B}$ переходит в состояние (q_v, S'). В противном случае машина останавливается.

Следующее предложение описывает связь между поведением автомата $\mathcal{A}$ и стековой машины $\mathcal{B}$.

Предложение 4. 1. Пусть конечная или бесконечная последовательность состояний $(q_{i_1}, S_1), (q_{i_2}, S_2), \ldots$ — траектория машины $\mathcal{B}$. Тогда $q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots$ — траектория автомата $\mathcal{A}$.

2. Пусть $q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots$ — траектория автомата $\mathcal{A}$. Тогда существует траектория машины $\mathcal{B}$ вида $(q_{i_1}, S_1), (q_{i_2}, S_2), \ldots$. При этом последовательности S_i не содержат цифры K.

Доказательство. Первое утверждение следует из конструкции машины $\mathcal{B}$. Для доказательства второго утверждения достаточно в качестве S_1 взять последовательность номеров состояний автомата: $i_1, i_2, \ldots$. Дальнейшее поведение машины $\mathcal{B}$ при этом определяется однозначно и удовлетворяет утверждению. ∎

Перейдем к описанию КПС $\mathcal{H}$, моделирующей машину $\mathcal{B}$ и автомат $\mathcal{A}$. Разместим на плоскости K описанных в пункте 2.2 "РОР-элементов" $\Pi_0, \ldots, \Pi_{K-1}$. Элемент Π_i имеет входной порт In_i и выходные порты $Out_{i0}, \ldots, Out$
Для любой пары $(q_i, q_j) \in \delta$ соединим порт Out_{ij} с портом In_j при помощи плоской трубы T_{ij}. Для того, чтобы трубы не пересекались (и чтобы несколько труб могли войти в один и тот же входной порт), придется выйти
Рис. 7 из плоскости, однако трех измерений всегда достаточно (см. рис. 7).

Следующее утверждение, устанавливающее связь между поведением систем $\mathcal{B}$ и $\mathcal{H}$ вытекает из конструкции КПС $\mathcal{H}$ и свойств используемой "элементной базы".

Предложение 5. Пусть конечная или бесконечная последовательность состояний $(q_{i_1}, S_1), (q_{i_2}, S_2), \ldots$ — траектория машины $\mathcal{B}$. Рассмотрим траекторию $\xi(t)$ системы $\mathcal{H}$ с начальной точкой $r(S_1)$ в порте In_{i_1}. Тогда эта траектория последовательно проходит через порты $In_{i_1}, In_{i_2}, \ldots$ в точках $r(S_1), r(S_2), \ldots$ соответственно. Других пересечений с портами In_i траек-

тория $\xi(t)$ не имеет.

Рассмотрим теперь абстракцию $\varphi : X \to Q$, определяемую следующим образом. Если $\mathbf{x} \in In_i$, то $\varphi(\mathbf{x}) = q_i$. Для всех $\mathbf{x}$, не принадлежащих ни одному из портов In_i, значение $\varphi(\mathbf{x})$ не определено. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 6. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$ эквивалентны (посредством абстракции φ).

Доказательство. Отношение $\mathcal{A} \preceq_\varphi \mathcal{H}$ вытекает из предложений 4 и 5. Отношение же $\mathcal{H} \preceq_\varphi \mathcal{A}$ следует из конструкции КПС $\mathcal{H}$, точнее из того факта, что труба может вести от Π_i к Π_j только если $(q_i, q_j) \in \delta$. ▄

Предложение 1 доказано. ▄

4. Доказательство теоремы 1. Конструкция КПС, моделирующей детерминированную машину Тьюринга основана на тех же идеях, что и предыдущее доказательство. И в данном случае моделируемые Д-системы (машины Тьюринга) сначала сводятся к некоторому виду стековых машин, а затем стековые операции моделируются при помощи элементов П и Ψ, а переходы из одного внутреннего состояния в другое — при помощи труб-соединителей. Впрочем, как будет показано ниже, прямая реализация этой схемы приводит к четырехмерной КПС, а чтобы "уместиться" в трех измерениях приходится прибегать к дополнительным построениям. Приступим к реализации этого плана.

Определим вначале 2СМ — *детерминированную машину с двумя стеками.* Фиксируем алфавит $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Обозначим через Σ^* подмножество Σ^ω, состоящее из последовательностей, в которых все цифры, кроме конечного числа, — нули. Обозначим через Σ° подмножество Σ^*, состоящее из последовательностей вида $s_1, \ldots, s_k, 0, 0, \ldots$, где $s_1, \ldots, s_k \in \{1, 2\}$. Пусть $Q = \{q_1, \ldots, q_N\}$ — конечное множество внутренних состояний 2СМ. Под 2СМ понимается Д-система $\mathcal{M}$ со счетным пространством состояний $\Sigma^* \times \Sigma^* \times Q$. Состояние 2СМ, таким образом, задается тройкой (S_1, S_2, q),

где S_1 и S_2 — содержимые стеков, а q — внутреннее состояние машины. Отношение переходов задается N инструкциями следующих двух видов:

$$q_i\colon\ S := \text{PUSH}(v, S)\quad \text{GOTO } q_j$$

$$q_i\colon\ (v, S) := \text{POP}(S);\quad \text{IF } v = 0 \ \text{ THEN GOTO } q_j;\quad \text{IF } v = 1 \ \text{ THEN GOTO } q_k;\quad \text{IF } v = 2 \ \text{ THEN GOTO } q_l.$$

Вместо любого оператора GOTO может также стоять оператор останова HALT.

Известный в информатике метод (см., например, в [1]) позволяет промоделировать любую МТ $\mathcal{T}$ (вида, описанного в разделе 4) при помощи 2СМ. В стеке S_1 хранится содержимое левой "половины" ленты машины $\mathcal{T}$. В стеке S_2 хранится правая половина ленты. Множество внутренних состояний 2СМ $Q_{\mathcal{M}}$ состоит из внутренних состояний МТ (это множество обозначим через $Q_{\mathcal{T}} \subset Q_{\mathcal{M}}$) и некоторых дополнительных состояний. Машина $\mathcal{M}$ не использует команды $\text{PUSH}(0, S_j)$. Машины $\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}$ "ведут себя" одинаково. Точнее, имеет место следующий факт.

Предложение 7. Машина $\mathcal{T}$, находящаяся во внутреннем состоянии $q^1 \in Q_{\mathcal{T}}$ при содержимом левой "половины" ленты α^1 и правой половины β^1, перейдет за конечное число шагов во внутреннее состояние $q^2 \in Q_{\mathcal{T}}$ при содержимом левой половины ленты α^2 и правой половины β^2 (или остановится) тогда и только тогда, когда машина $\mathcal{M}$ из состояния (α^1, β^1, q^1) перейдет за конечное число шагов в состояние (α^2, β^2, q^2) (соответственно, остановится).

Детали конструкции и доказательство читатель может найти, например, в [1] или воспроизвести самостоятельно.

Теперь покажем, как по 2СМ $\mathcal{M}$ построить моделирующую ее КПС $\mathcal{H}$. Эта конструкция является обобщением доказательства предложения 1.

Определим кодирующую функцию $\bar{r} : \Sigma^* \times \Sigma^* \to [0,1) \times [0,1)$, полагая $\bar{r}(S_1, S_2) = (r(S_1), r(S_2))$. Таким образом каждой конфигурации двух сте-

ков сопоставляется точка $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ двумерного "порта" — квадрата 1×1 (координаты берутся относительно левого нижнего угла). Элементы Ψ^1, Ψ^2, Φ^1 и Φ^2, моделирующие стековые операции (PUSH(v, S_1), PUSH(v, S_2), POP(S_1) и POP(S_2)), действуют в соответствующем измерении аналогично описанным выше элементам Φ и Ψ, оставляя другое измерение неизменным. В качестве примера на рис. 8 приведен элемент, выполняющий операцию PUSH$(2, S_1)$.

Рис. 8

Аналогично строятся и остальные элементы.

Чтобы сконструировать КПС $\mathcal{H}$, моделирующую данную 2СМ $\mathcal{M}$, следует для каждого внутреннего состояния $q_i \in Q_{\mathcal{M}}$ построить соответствующий порт P_i, к которому присоединен элемент E_i типа Φ^j или Ψ^j (где $j = 1, 2$), в зависимости от инструкции I_i, относящейся к состоянию q_i. Для каждого оператора GO TO q_l, входящего в I_i, соединим соответствующий выходной порт элемента E_i с портом P_l при помощи трубы квадратного сечения. Единственная проблема при этом следующая: как присоединить к одному квадратному порту несколько призматических труб квадратного сечения. К сожалению, это возможно лишь в четырехмерном пространстве. После этого эквивалентность $\mathcal{H}$ и $\mathcal{M}$ следует из конструкции $\mathcal{H}$ и свойств элементов Φ^j и Ψ^j. Тем самым, уже установлен следующий факт.

Предложение 8. Любая 2СМ и, следовательно, любая МТ эквивалентна четырехмерной КПС.

Для того, чтобы понизить размерность модели до трех, потребуется некоторое усложнение ее конструкции. В частности, станет ясно, для чего мы рассматривали 2СМ с трехбуквенным алфавитом $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ (без особого состояния 0 для пустых клеток ленты МТ до сих пор вполне можно было обойтись).

План действий таков. Будет описан класс правильных 2СМ и показано, что они допускают трехмерные модели. Затем будет установлено,

что каждую 2СМ, соответствующую МТ, можно введением промежуточных состояний и переходов расширить до правильной. Трехмерная модель этой правильной машины будет искомой моделью МТ.

Введем еще несколько понятий и обозначений. Траекторию машины $\mathcal{M}$ будем называть *нормальной*, если она начинается из состояния (α^1, β^1, q_1), где $\alpha^1, \beta^1 \in \Sigma^\circ$. Соответствующее начальное состояние также будем называть нормальным. При моделировании МТ встречаются только нормальные траектории. Обозначим через $S(i,j)$ множество пар $\{(S_1, S_2) \in \in \Sigma^\omega \times \Sigma^\omega\}$ содержимых стеков, встречающихся после перехода из q_i в q_j на нормальных траекториях $\mathcal{M}$. Через $T(i,j)$ обозначим множество пар $\{(v_1, v_2)\}$ верхушек стеков из $S(i,j)$.

Определение 7. Внутреннее состояние q_k 2СМ $\mathcal{M}$ называется *сепарированным*, если для любых двух различных состояний $q_i \neq q_j \in Q$ множества $T(i,k)$ и $T(j,k)$ не пересекаются. Иными словами, по содержимому вершин стеков при приходе в состояние q_k можно определить предшествующее состояние машины (для нормальных траекторий).

Внутреннее состояние q_k 2СМ $\mathcal{M}$ называется *планарным*, если для любого состояния $q_j \in Q$ и пары $(S_1, S_2) \in S(j,k)$ стек S_1 пуст, т.е. $S_1 = 0, 0, 0, \ldots$.

2СМ $\mathcal{M}$ называется *правильной*, если каждое ее состояние либо сепарированное, либо планарное.

Предложение 9. Каждая правильная 2СМ эквивалентна (для нормальных траекторий) трехмерной КПС.

Схема доказательства. Как обычно, разместим в $\mathbb{R}^3$ элементы E_k вида Π и Ψ, соответствующие внутренним состояниям $q_k \in Q$.

"Трубы", ведущие ко входному порту E_k для сепарированного состояния q_k (и соответствующие операторам GO TO q_k), "прокладываются" следующим образом. Разобьем порт на 9 квадратиков размерами $1/3 \times 1/3$.

Рассмотрим любой из этих квадратиков. Ему отвечает некоторая пара (v_1, v_2) верхушек стеков. В силу сепарированности существует не более одного состояния q_i, для которого $(v_1, v_2) \in T(i, k)$. Если такое q_i существует, то рассматриваемый квадратик соединяется трубой квадратного сечения $1/3 \times 1/3$ с так же расположенным квадратиком на выходном порте элемента E_i. Если такое q_i не существует, то квадратик оставляется свободным (см. рис. 9).

Рис. 9

Для планарного состояния q_k ко входному порту E_k (точнее к его левому ребру) подводятся плоские трубы от левых ребер всех нужных элементов E_i. Из доказательства предложения 1 известно, что плоские трубы в трехмерном пространстве можно соединять в любом количестве (см. рис. 10).

Рис. 10

Описание трехмерной моделирующей КПС окончено. Доказываемое утверждение вытекает непосредственно из конструкции и определений. ∎

Покажем теперь, как, введя "промежуточные" состояния, можно преобразовать любую 2СМ к правильному виду. Основная идея состоит в следующем: каждый раз после выполнения стековой операции следует "кодировать" стеки, т.е. опустошить стек S_1, перенеся его содержимое на верх другого (для разделения положить цифру 0). Операции GOTO теперь можно выполнить при помощи плоских труб: ведь вся информация содержится в одном стеке. Наконец, перед входом в новое состяние "декодируем", т.е. восстанавливаем по объединенному представлению, содержимое обоих стеков. Следует еще показать, что как кодирование, так и декодирование могут быть выполнены при помощи машин с сепарированными состояниями.

Кодер преобразует пару стеков

$$S_1 = x_1, \ldots, x_l, 0, 0, 0 \ldots \quad S_2 = y_1, \ldots, y_m, 0, 0, 0, \ldots$$

(где $x_i, y_j \in \{1; 2\}$) в стеки

$$S_1 = 0, 0, 0, \ldots \quad S_2 = x_l, \ldots, x_1, 0, y_1 \ldots, y_m, 0, 0, 0, \ldots .$$

Декодер делает обратную операцию. В приводимых ниже программах для кодера и декодера состояния обозначаются “значащими” метками.

Кодер ставит цифру 0 в качестве разделителя в стек S_2, а затем по одной переносит цифры из S_1 в S_2, пока не дойдет до “хвостового” нуля.

Вход: PUSH$(0, S_2)$
GO TO **Цикл**;
Цикл: $v :=$ POP(S_1);
IF $(v = 0)$ GO TO **Выход**;
IF $(v = 1)$ GO TO **Перенос1**;
IF $(v = 2)$ GO TO **Перенос2**;
Перенос1: PUSH$(1, S_2)$
GO TO **Цикл**;
Перенос2: $push(2, S_2)$
GO TO **Цикл**;
Выход:

Декодер по одной переносит цифры из S_1 в S_2, пока не дойдет до разделителя “0”.

Вход: PUSH$(0, S_1)$
GO TO **Цикл**;
Цикл: $v :=$ POP(S_2);
IF $(v = 0)$ GO TO **Выход**;
IF $(v = 1)$ GO TO **Перенос1**;
IF $(v = 2)$ GO TO **Перенос2**;
Перенос1: PUSH$(1, S_1)$
GO TO **Цикл**;
Перенос2: $push(2, S_1)$
GO TO **Цикл**;
Выход:

Нетрудно убедиться, что все состояния кодера и декодера сепарированные. Единственное исключение составляет "**Вход**" декодера, являющийся планарным.

Пусть дана 2СМ $\mathcal{M}$, не использующая команды PUSH$(0, S_j)$. Правильная 2СМ $\mathcal{M}'$ получается из $\mathcal{M}$ следующим образом. Все состояния машины $\mathcal{M}$ остаются состояниями $\mathcal{M}'$. Операторы POP и PUSH, относящиеся к этим состояниям, остаются без изменения. Для каждого состояния q_i исходной машины к ней добавляется экземпляр декодера D_i с состоянием q_i в качестве "**Выхода**". Для каждой инструкции GO TO q_i исходной машины добавляется экземпляр кодера C_j. Инструкция GO TO q_i заменяется командой перехода на вход кодера C_j. На выходе кодера C_j ставится команда перехода на вход декодера D_i. Это несколько громоздкое описание
Рис. 11 поясняется примером на рис. 11.

Машина $\mathcal{M}'$ действительно является правильной: все состояния кодеров и декодеров сепарированные или планарные, а состояния исходной машины тривиальным образом сепарированные, поскольку в любое такое состояние q_i можно попасть из единственного состояния декодера D_i.

Опишем связь между траекториями машины $\mathcal{M}$ и ее правильного расширения $\mathcal{M}'$. Пусть дана траектория

$$T = (p^1, S_1^1, S_2^1), (p^2, S_1^2, S_2^2), \ldots$$

машины $\mathcal{M}'$. Вычеркнем из нее все состояния, для которых $p^i \notin Q_{\mathcal{M}}$. Получившуюся последовательность состояний обозначим через $\tilde{T}$.

Предложение 10. 1. Для каждой нормальной траектории T машины $\mathcal{M}'$ последовательность $\tilde{T}$ является нормальной траекторией машины $\mathcal{M}$.

2. Для каждой нормальной траектории T машины $\mathcal{M}$ существует такая нормальная траектория T' машины $\mathcal{M}'$, что $T = \tilde{T'}$.

Из предложений 9 и 10 вытекает следующий факт.

Следствие 2. Каждая 2СМ эквивалентна (для нормальных траекторий) трехмерной КПС.

Действительно, в качестве трехмерной модели произвольной 2СМ можно взять модель ее правильного расширения.

Из следствия 2 вытекает утверждение доказываемой теоремы. Таким образом, чтобы построить трехмерную КПС, эквивалентную данной МТ, следует проделать следующие шаги:

1. построить по машине Тьюринга эквивалентную 2СМ ;
2. построить правильное расширение этой 2СМ;
3. построить трехмерную модель правильного расширения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М: Мир, 1978.
2. Alur R., Courcoubetis C., Henzinger T., Ho P., Hybrid automata: An algorithmic approach to the specification and analysis of hybrid systems// Workshop on Hybrid Systems, Lect. Notes in Comp. Sci. 736, Springer-Verlag, 1993. P. 209–229.
3. Brockett R.W., Smooth dynamical systems which realize arithmetical and logical operations// Three Decades of Mathematical Systems Theory, Lect. Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 1989. P. 19–30.
4. Cosnard M., Garzon M., Koiran P. Computability properties of low-dimensional dynamical systems// Proc. of the 10th Ann. Symp. on Theoretical Aspects of Computer Science, Lect. Notes in Comp. Sci. 665, Springer-Verlag, 1993. P. 586–594.
5. Maler O., Manna Z., Pnueli A. From timed to hybrid systems// Proceedings of the REX Workshop "Real-Time: Theory in Practice", Lect. Notes in Comp. Sci. 600, Springer-Verlag, 1992. P. 447–484.
6. Maler O., Pnueli A. Reachability analysis of planar multi-linear systems // Proc. of the 5th Workshop on Computer-Aided Verification, Elounda, Greece, Lect. Notes in Comp. Sci. 697, Springer-Verlag, 1993. P. 194–209.
7. X. Nicollin X., Olivero A., Sifakis J., Yovine S. An approach to the description and analysis of hybrid systems // Workshop on Hybrid Systems, Lect. Notes in Comp. Sci. 736, Springer-Verlag, 1993. P. 149–178.
8. X. Nicollin X., Sifakis J., Yovine S. From ATP to timed graphs and hybrid systems // Proc. of the REX Workshop "Real-Time: Theory in Practice", Lect. Notes in Comp. Sci. 600, Springer-Verlag, 1992. P. 549–572.

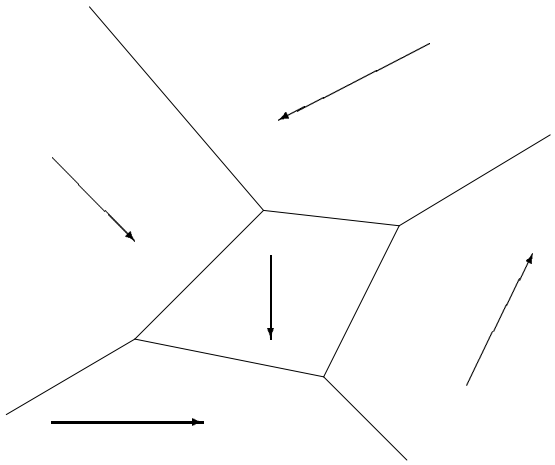

Рис. 1. Пример КПС на плоскости

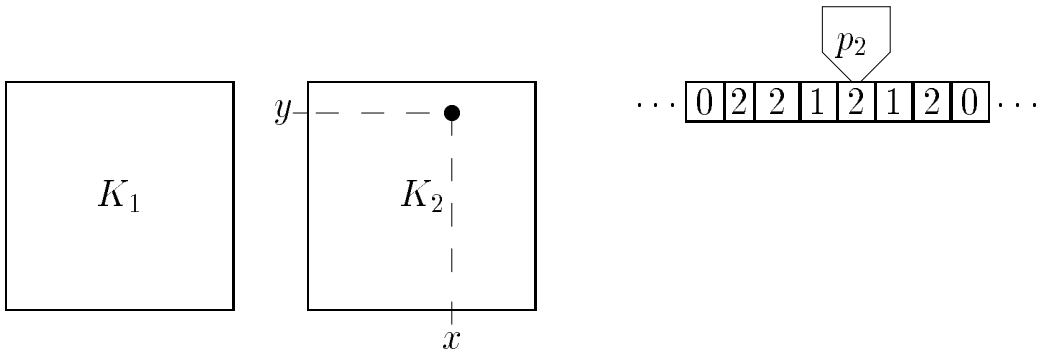

Рис. 2. Абстракция при моделировании МТ. Соответственные состояния $\mathcal{H}$ и $\mathcal{A}$. $(x = 0{,}1220; y = 0{,}2120)$

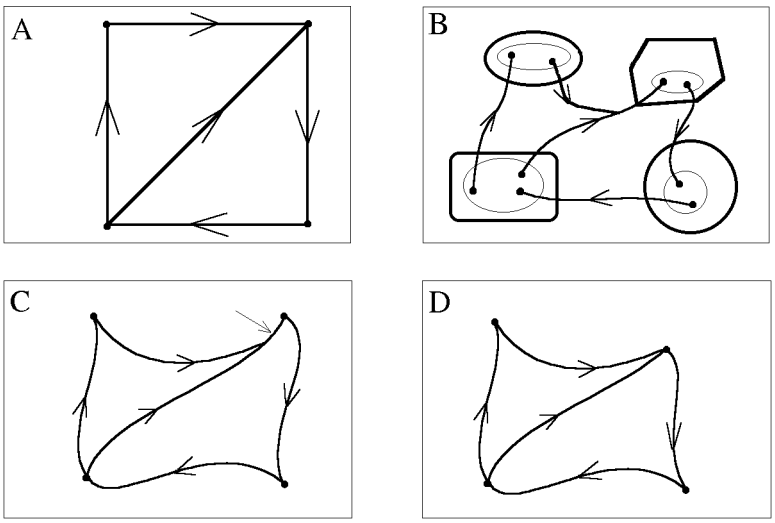

Рис. 3. Конечный автомат и его плоская модель

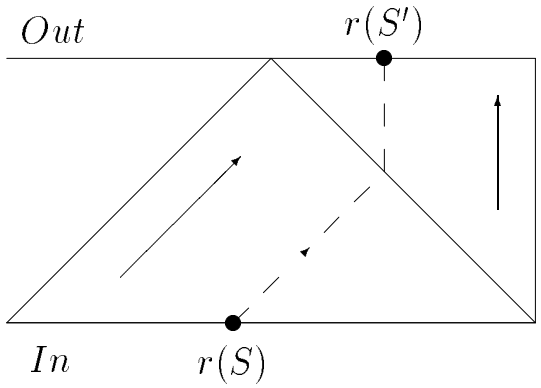

Рис. 4. КПС Ψ, реализующая $\textsc{push}(1, S)$ (число букв $N = 2$)

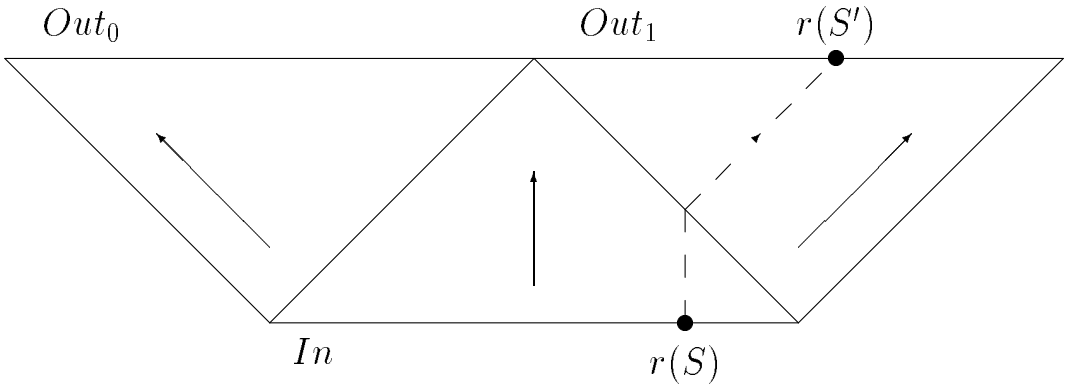

Рис. 5. КПС Π, реализующая $\textsc{pop}(S)$ (число букв $N = 2$)

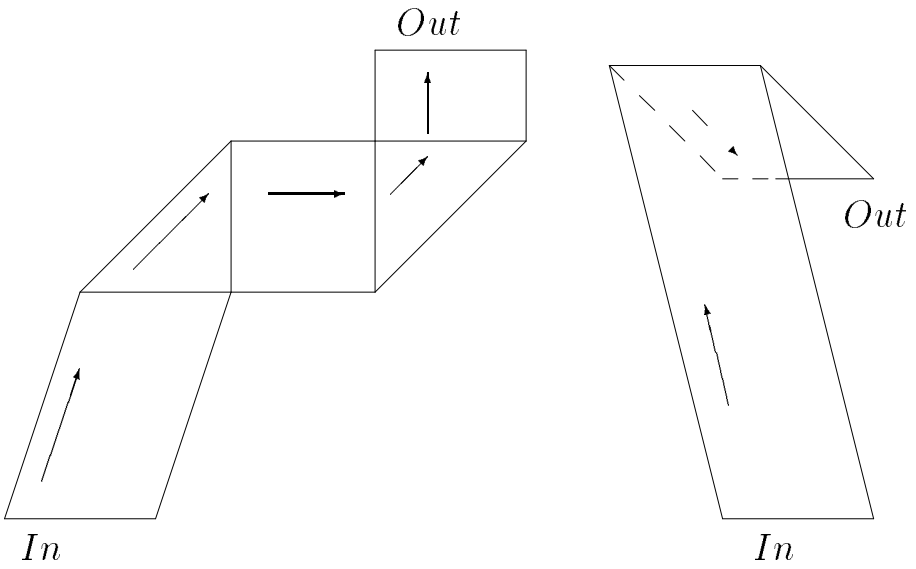

Рис. 6. Трубы

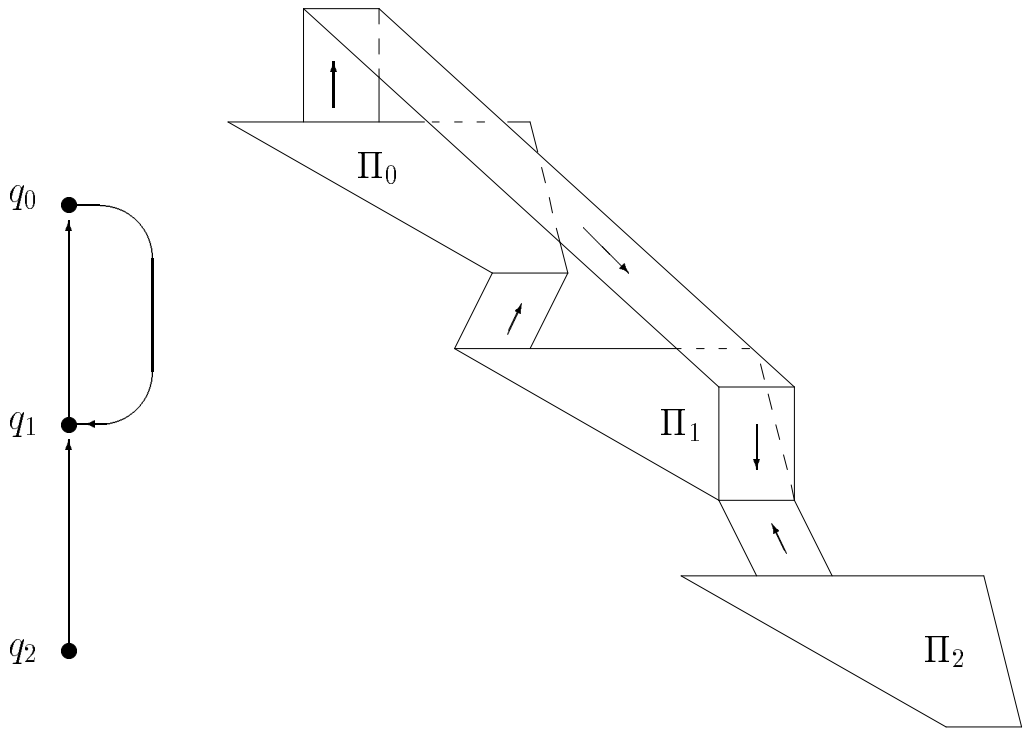

Рис. 7. Конечный автомат и его трехмерная модель (внутренняя структура элементов Π_i не показана)

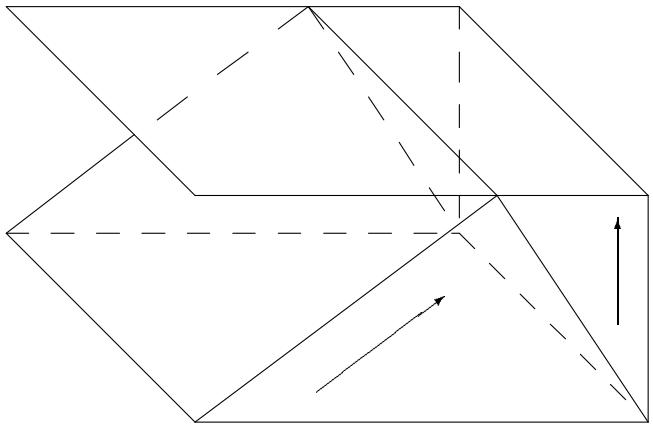

Рис. 8. Элемент Ψ^1, моделирующий $\textsc{push}(2, S_1)$

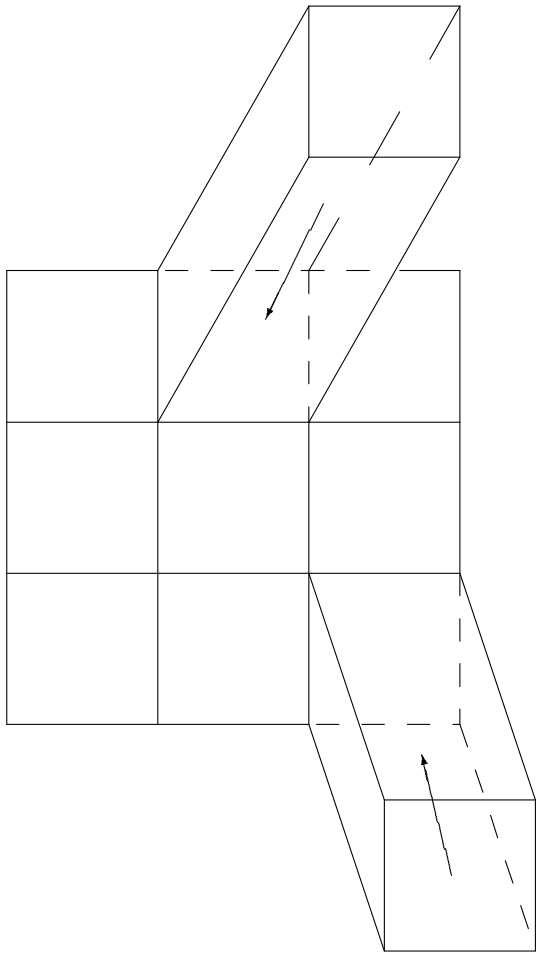

Рис. 9. Входной порт сепарированного элемента

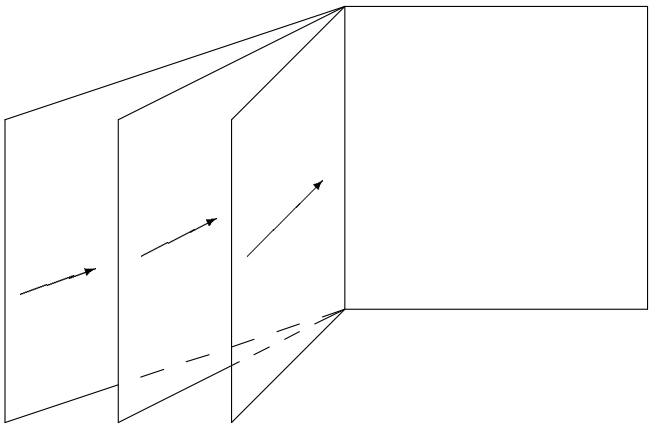

Рис. 10. Входной порт планарного элемента

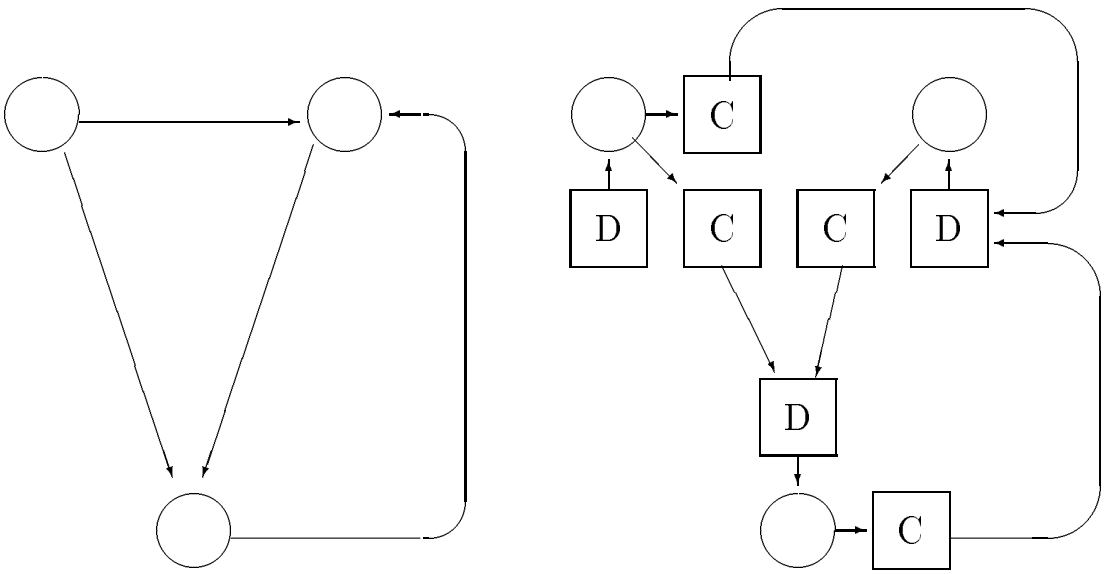

Рис. 11. 2CM и ее правильное расширение