

Algorithmique TD 1

Licence M/I

28 septembre 2005

Exercice 1: On considère la procédure suivante :

```
static void triSelection(int t[]){
    int n=t.length;
    for(int i=1;i<n;i++){
        int j=i, p=t[j];
        while(j>0 && p<t[j-1]){
            t[j]=t[j-1];
            j--;
        }
        t[j]=p;
    }
}
```

- Décrire ce que fait cet algorithme.
- Quelle est sa complexité dans le pire des cas ?
- On considère fixé l'ensemble d'éléments du tableau (par exemple les entiers de 1 à n). Donner le nombre de permutations de ces n éléments, c'est-à-dire le nombre de tableaux différents de taille n qui peuvent contenir n éléments fixés distincts.
- Le nombre d'inversions d'un tableau t est le nombre de couples d'entiers (i, j) inférieurs à n tels que $i < j$ et $t_i > t_j$. Montrer que le nombre d'inversions de t est égal au nombre de boucles effectuées dans le tri par sélection appliqué à t .
- On suppose que t_n est égal au k -ième plus petit élément de t . Montrer que le nombre d'inversions de t est égal au nombre d'inversions de t privé de la case n , plus $(n - k)$. Quel est le nombre de tableaux contenant n éléments fixés tels que la dernière case contient le k -ième plus petit élément ?
- On note i_n le nombre moyen d'inversions d'un tableau de n éléments. Exprimer i_n en fonction de i_{n-1} . En déduire i_n et la complexité en moyenne du tri par insertion.

Exercice 2: On considère la procédure suivante :

```
static void triRapide(int t[],int g, int d){//1er appel, g=0 d=t.length-1
    int n=t.length;
    int j=g, p=t[j];
    for(int i=g+1;i<=d;i++){
        if(t[i]<p){ // A
            t[j++]=t[i];
            t[i]=t[j];
        }
    }
    t[j]=p;
    if(j-1>g) triRapide(t, g, j-1);
    if(j+1<d) triRapide(t, j+1, d);
}
```

- a) Décrire ce que fait cet algorithme.
- b) Quelle est sa complexité dans le pire des cas?
- c) Soit C_n le nombre de fois qu'on exécute en moyenne la comparaison A lorsqu'on trie un tableau de n éléments. Montrer que $C_n = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (C_{k-1} + C_{n-k})$. En déduire que $nC_n - (n+1)C_{n-1} = 2(n-1)$.
- d) Conclure quant à la complexité en moyenne du tri rapide. On admettra $\sum \frac{1}{n} \sim \log(n)$.

Exercice 3: On considère les procédures suivantes :

```
static void retourne(int t[],int g, int d){
    int c;
    while(g<d){
        c=t[g]; t[g]=t[d]; t[d]=c;
        g++; d--;
    }
}

static void placeZero(int t[]){
    while(t[0]!=0)
        retourne(t,0,t[0]);
}
```

On applique la procédure `placeZero` à un tableau de taille n contenant tous les nombres de 0 à $n - 1$. Montrer que la procédure termine. Donner une borne sur sa complexité.