

Algorithmique TD 2

Licence M/I

3 octobre 2005

Exercice 1: Soit t un tableau d'entiers relatifs de taille n ; on considère les sommes de cases successives et on veut calculer le maximum parmi ces sommes. Proposer un algorithme et évaluer sa complexité.

Exercice 2: *Problème de sac à dos.* Un sac à dos a une certaine capacité C . On dispose de n objets de volumes $v[1], v[2], \dots, v[n]$. On veut remplir le plus possible le sac à dos, c'est-à-dire trouver un sous-ensemble d'objets dont la somme des volumes soit inférieure à C et maximale.

1. Résoudre le problème du sac à dos pour $C = 150$ et $v = \{16, 22, 54, 56, 71\}$.
2. On note $m(C, v[1..k])$ la solution au problème de sac à dos pour un sac de capacité C avec les objets $1, 2, \dots, k$. Trouver une relation entre $m(C, v[1..k])$, $m(C, v[1..(k-1)])$ et $m(C - v[k], v[1..(k-1)])$. En déduire un algorithme de calcul de $m(C, v[1..n])$. Quel est sa complexité en temps et en espace ?
3. On veut remplir un tableau M de taille $n \times n$ de telle sorte que

$$M[i, k] = m(C - \sum_{j>i} v[j], v[1..k]).$$

Donner un algorithme quadratique pour remplir ce tableau. En déduire un algorithme quadratique en temps et en espace pour calculer $m(C, v[1..n])$.

Exercice 3: Plus grande sous-séquence commune. Un mot w de longueur n est une suite de n lettres : $w = w_1w_2\dots w_n$. Un sous-mot de w est une sous-suite : $w_{s(1)}w_{s(2)}\dots w_{s(k)}$, avec s fonction strictement croissante. On cherche un algorithme pour calculer la longueur maximale d'un sous-mot commun à deux mots donnés u et v .

1. Trouver le(s) plus long(s) sous-mot(s) commun(s) à *abracadabra* et *barbapapa*.
2. On note $\ell(u, v)$ la longueur maximale d'un sous-mot commun à u et à v . Si $u = u_1\dots u_n$ et $v = v_1\dots v_m$, on note $u' = u_1\dots u_{n-1}$ et $v' = v_1\dots v_{m-1}$. Trouver une relation entre $\ell(u, v)$, $\ell(u', v)$, $\ell(u, v')$ et $\ell(u', v')$ dépendant du fait que les dernières lettres de u et v sont égales ou non.
3. Trouver un algorithme quadratique pour le calcul du plus long sous mot commun.