Licence M/I

Algorithmique : TD 4

17 octobre 2005

Algorithme de Boyer-Moore

Le texte est dénoté par t, de longueur n, le motif est w, de longueur m ; les lettres des mots sont indicées à partir de 0. Pour toute paire $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, pour tout mot u, $u[p..q]$ est le facteur de u situé entre (au sens large) les indices p et q ; si $p > q$, il s'agit du mot vide. i désigne généralement une position dans w et j la position de w par rapport à t. Dans l'agorithme de Boyer-Moore, on vérifie que le motif correspond au texte en examinant les lettres *de droite à gauche*. Globalement, on déplace toujours le motif du début du texte vers la fin.

Pour améliorer l'algorithme naïf, on effectue des décalages sur les principes du "bon suffixe" et du "mauvais caractère".

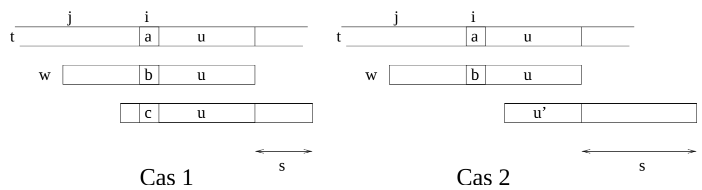
Le bon suffixe On suppose que $w[i+1..m-1] = t[i+j+1..m+j-1]$ et que $w[i] \neq t[i+j]$. On calcule s qui est le plus petit entier de $]0, i[$ tel que

$$w[i+1-s..m-1-s] = t[i+j+1..m+j-1] \quad \text{et} \quad w[i] \neq w[i-s].$$

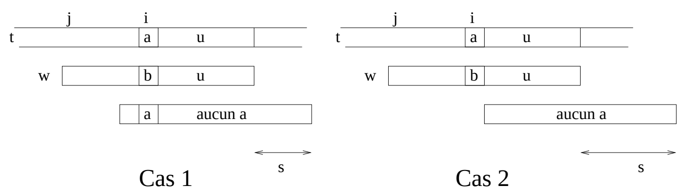
Si un tel entier n'existe pas, on calcule s qui est le plus petit entier de $]i, m-1[$ tel que

$$w[0..m-s] = w[s-1..m-1].$$

On incrémente alors j de s au lieu de 1 dans l'algorithme.

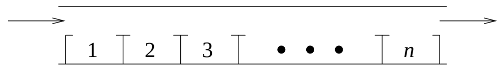


Le mauvais caractère Si $w[i] \neq t[i+j]$, on pose k l'emplacement de la dernière occurence de $t[i+j]$ dans w ($k = -1$ si $t[i+j]$ n'apparaît pas w) et on incrémente j de $\max(1, i-k)$.



Suites de parking

Un parking a la configuration ci-dessous :



La méthode (I) pour garer une voiture est la suivante :
Chaque voiture arrive avec une place p qu'elle désire occuper. Si celle-ci n'est pas libre, elle se place dans la première place libre supérieure à p. Si elle ne trouve pas une telle place, elle sort ; elle a échoué à se garer.

On considère n voitures $(1, 2, ..., n)$ qui désirent se garer dans cet ordre, la voiture i visant la place p_i. Si les n voitures parviennent à se garer, la suite $(p_i)_{i\in[1;n]}$ est appelée **suite de parking**.

Exercice 1: La suite $(2, 3, 1, 3, 2)$ est-elle une suite de parking ? Quel est le résultat ?

Exercice 2: Donner une autre suite de parking aboutissant au même résultat.

Exercice 3: Montrer que $(p_i)_{i\in[1;n]}$ est une suite de parking si et seulement si

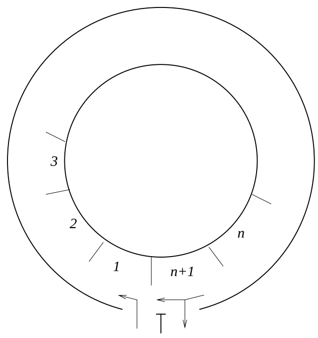
$$\forall k \in [1; n],\ \mathrm{Card}\{i \mid p_i \leqslant k\} \geqslant k.$$

Exercice 4: La méthode (II) pour garer une voiture est la suivante :
Lorsqu'une voiture décide de se garer en p, si la place est occupée, la voiture qui se trouve dessus est poussée sur la place $p + 1$. Si celle-ci n'était pas libre, son occupante est poussée sur la place $p + 2$ et ainsi de suite. S'il faut pousser la voiture qui se trouve en n, il y a échec.
Dessiner la configuration obtenue avec la suite $(2, 3, 1, 3, 2)$, puis avec la suite donnée en **2**.

Exercice 5: Montrer que la méthode (II) permet de garer n voitures $(1, 2, ..., n)$ si et seulement si la suite $(p_i)_{i\in[1;n]}$ correspondante est une suite de parking.

Exercice 6: Pour une suite de parking $(p_i)_{i\in[1;n]}$ donnée, on note $(u_i)_{i\in[1;n]}$ et $(v_i)_{i\in[1;n]}$ les suites (qui sont des permutations) obtenues respectivement avec les méthodes (I) et (II).
Montrer qu'à un couple de permutations $(u_i)_{i\in[1;n]}$ et $(v_i)_{i\in[1;n]}$ ne correspond (au plus) qu'une suite de parking qu'on peut, le cas échéant, effectivement construire.

Exercice 7: On considère maintenant un parking un peu différent. A la sortie du parking, il y a une place supplémentaire (soit, en tout, $n + 1$ places). De plus, la méthode (I) est modifiée de la façon suivante : si une voiture n'a pas réussi à se garer (y compris dans cette dernière place), la voiture rentre à nouveau dans le parking et prend la première place disponible. La place visée par une voiture peut à présent être un nombre entre 1 et $n + 1$.



Evidemment, avec cette méthode, les voitures arrivent toujours à se garer (il y a même une place vide à la fin). Comment voit-on, à la fin de l'opération, si la suite $(p_i)_{i\in[1;n]}$ était une suite de parking ?

Exercice 8: Montrer que si la suite $(p_i)_{i\in[1;n]}$ laisse la place j libre, la suite $(p'_i)_{i\in[1;n]}$ définie par

$$p'_i = \begin{cases} p_i + 1 & \text{si} \quad p_i \leqslant n \\ 1 & \text{si} \quad p_i = n + 1 \end{cases}$$

laisse la place $j + 1$ (ou 1 si $j = n + 1$) libre.

Exercice 9: En déduire le nombre de suites de parking.