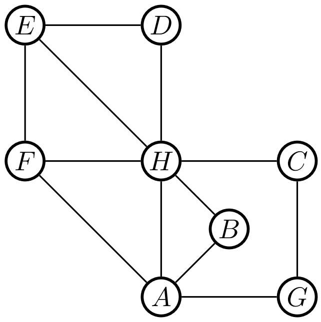
Algorithmique: TD 9

Licence M/I

21 novembre 2005

Exercice 1: Le degré d'un sommet d'un graphe est le nombre d'arêtes connectées au sommet. Est-il possible de définir un graphe contenant exactement trois sommets de degré 3 et quatre sommets de degré 2.

Exercice 2: On considère le graphe suivant, on suppose que les voisins d'un nœud sont rangés par ordre alphabétique.



Dessiner l'arborescence correspondant à un parcours en largeur à partir de A.

Exercice 3: On veut colorer un graphe, c'est-à-dire attribuer à chaque sommet une couleur (représentée par un entier) de sorte que chaque sommet ait une couleur différente de ses voisins. On propose l'algorithme suivant :

- on parcours le graphe en largeur ;
- pour chaque sommet à colorier, on attribue le plus petit entier possible qui n'est pas pris par un de ses voisins.

Il s'agit d'un algorithme "glouton". Montrer qu'on utilise deux couleurs si et seulement si le graphe est bipartite (c'est-à-dire qu'il existe une partition de l'ensemble des sommets en deux classes telle que deux sommets voisins sont dans des classes différentes).

L'algorithme proposé fournit-il toujours un résultat avec un nombre minimal de couleurs ? Donner un contre-exemple.

Exercice 4: Le degré d'un sommet d'un graphe est le nombre d'arêtes connectées au sommet. Un parcours *eulérien* d'un graphe (non orienté) est un chemin qui contient une et une seule fois chaque arête du graphe.

1) Montrer que s'il existe un parcours eulérien d'un graphe $\mathcal{G}$, le nombre de sommets de $\mathcal{G}$ de degré impair est au plus égal à deux.

2) On suppose maintenant que $\mathcal{G}$ est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. On procède au parcours suivant : on part d'un sommet s et, s'il existe une arête de s qui n'a pas encore été empruntée, on l'emprunte et on recommence dans le sommet suivant ; si toutes les arêtes ont été empruntées, on s'arête.

- Montrer que ce parcours est un circuit.
- Montrer que si ce circuit n'est pas eulérien, le nombre d'arêtes non empruntées est pair. En déduire un moyen de prolonger le circuit en un circuit eulérien plus grand.
- Imaginer un algorithme permettant de construire le parcours eulérien d'un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair.