Licence de Mathématiques
Projet d'algorithmique

1 Modalités

Le projet sera écrit en MAPLE et sera réalisé par binômes (2 personnes). Le rapport sera rédigé à l'aide de LaTeX (une séance d'initiation est prévue en décembre sur ce traitement de texte). Un dossier comportant le rapport et un listing commenté des programmes écrits sera rendu avant le lundi 9 janvier 1995 au secrétariat de la licence. Il sera apporté un soin tout particulier à la lisibilité et à la clarté des programmes. Le projet fera l'objet d'une mini-soutenance lors d'une séance de travaux dirigés.

2 Rappels de mathématiques

On suppose un corps commutatif K et n un entier fixés. On note $K[X_1, \ldots, X_n]$ la K-algèbre des polynômes en n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$.

On note $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n, *i.e.* l'ensemble des applications bijectives de $[1, n]$ dans $[1, n]$. Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ définit un automorphisme $P \mapsto P^\sigma$, avec $P^\sigma(X_1, \ldots, X_n) = P(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$ de l'algèbre $K[X_1, \ldots, X_n]$. On dit qu'un polynôme P est *symétrique* si $P^\sigma = P$ pour toute $\sigma \in \mathcal{S}_n$ (le polynôme reste inchangé lorsque l'on permute les indéterminées).

On définit les *polynômes symétriques élémentaires* E_k pour $1 \leq k \leq n$ par

$$E_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} X_{i_1} \ldots X_{i_k}$$

On vérifie aisément que les polynômes E_k ainsi définis sont symétriques et homogènes de degré k.

Exemple 1 *Pour $n = 3$, les trois polynômes élémentaires sont*

$$\begin{aligned} E_1 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ E_2 &= X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 \\ E_3 &= X_1X_2X_3 \end{aligned}$$

On admettra le résultat fondamental suivant. Pour tout polynôme symétrique P de $K[X_1, \ldots, X_n]$, il existe un polynôme Q non nécessairement symétrique de $K[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $P(X_1, \ldots, X_n) = Q(E_1, \ldots, E_n)$. Ceci signifie que tout polynôme symétrique peut s'exprimer de façon polynomiale en fonction des polynômes symétriques élémentaires E_k.

Exemple 2 *Pour $n = 3$, le polynôme symétrique $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$ s'écrit $E_1^3 - 3E_1E_2 + 3E_3$.*

La détermination de Q peut être laborieuse si le degré de P est élevé. On utilise souvent comme intermédiaires de calcul, les *polynômes puissance* P_k définis par

$$P_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Les polynômes puissance sont des polynômes symétriques.

Exemple 3 *Pour $n = 3$, les trois premiers polynômes puissance sont*

$$\begin{aligned} P_1 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ P_2 &= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \\ P_3 &= X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 \end{aligned}$$

Les polynômes symétriques et les polynômes puissance sont reliés par les formules de Newton.
Pour $1 \leq k \leq n$:

$$P_k - E_1P_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}E_{k-1}P_1 + (-1)^k kE_k = 0$$

Pour $k > n$:

$$P_k - E_1P_{k-1} + \cdots + (-1)^{n-1}E_{n-1}P_{k-n+1} + (-1)^n E_nP_{k-n} = 0$$

On utilisera ces formules pour effectuer le travail demandé.

3 Travail demandé

1. Soit m un entier et $k = \inf(n, m)$ où n est toujours le nombre d'indéterminées de l'algèbre. Soit `elem` une liste de k variables représentant les k premiers polynômes élémentaires. Écrire une fonction `elem2puis` prenant en argument n, m et la liste `elem` et calculant la liste des m premiers polynômes puissance en fonction des variables de la liste `elem`.

   Exemple 4 *On suppose $n = 2$. L'appel* `elem2puis(2,3,[e1,e2])` *doit rendre le résultat* `[e1,e1^2-2*e2, e1^3-2*e1*e2]` *puisque les trois premiers polynômes puissance sont respectivement égaux à*

$$\begin{array}{rclcl} P_1 & = & X_1 + X_2 & = & E_1 \\ P_2 & = & X_1^2 + X_2^2 & = & E_1^2 - 2E_2 \\ P_3 & = & X_1^3 + X_2^3 & = & E_1^3 - 3E_1E_2 \end{array}$$

2. Soit m un entier et $k = \inf(n, m)$ où n est toujours le nombre d'indéterminées de l'algèbre. Soit `puis` une liste de k variables représentant les k premiers polynômes puissance. Écrire une fonction `puis2elem` prenant en argument n, m et la liste `puis` et calculant la liste des m premiers polynômes élémentaires en fonction des variables de la liste `puis`. Par convention les polynômes symétriques élémentaires d'indice k supérieur à n sont nuls.

   Exemple 5 *On suppose $n = 2$. L'appel* `puis2elem(2,3,[p1,p2])` *doit rendre le résultat* `[p1,(p1^2 - p2)/2,0]` *puisque les deux premiers polynômes élémentaires sont respectivement égaux à*

$$\begin{array}{rclcl} E_1 & = & X_1 + X_2 & = & P_1 \\ E_2 & = & X_1X_2 & = & (P_1^2 - P_2)/2 \end{array}$$

   et que le troisième est nul par convention.

3. Vérifier que les fonctions `elem2puis` et `puis2elem` sont réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire `elem2puis(n,m,puis2elem(n,m,puis)) = puis` et `puis2elem(n,m,elem2puis(n,m,elem)) = elem`.

4. Montrer que tous les polynômes puissance peuvent s'exprimer de façon polynomiale en fonction des n premiers polynômes puissance.

   Exemple 6 *Pour $n = 2$, le polynôme puissance $P_4 = X_1^4 + X_2^4$ s'écrit $P_4 = (X_1^2 + X_2^2)^2 - 2X_1^2X_2^2 = P_2^2 - (P_1^2 - P_2)^2/2$.*

5. Écrire une fonction `puis2puis` permettant d'exprimer un polynôme puissance en fonction des n premiers polynômes puissance.

   Exemple 7 *Pour $n = 2$, l'appel* `puis2puis(2,4,[p1,p2])` *devra rendre le résultat* `p2^2 - (p1^2 - p2)^2/2`.

6. Traduire matriciellement les formules de Newton. On remarquera que les fonctions demandées peuvent également s'écrire avec des calculs matriciels. Programmer cette autre méthode et comparer.

7. Ajouter aux fonctions précédentes la possibilité de compléter la liste des variables passée en argument par des variables supplémentaires si leur nombre est insuffisant. Par exemple, l'appel à `elem2puis(4,5,[T])` devra être équivalent à l'appel `elem2puis(4,5,[T,e1,e2,e3])`

4 Exemples de résultats

```
> elem2puis(1,4,[e1]);
                                  2     3     4
                          [e1, e1 , e1 , e1 ]
-----------------------------------------------------------------
> elem2puis(2,4,[e1,e2]);
              2             2
        [e1, e1  - 2 e2, (e1  - 2 e2) e1 - e1 e2,

               2                             2
            ((e1  - 2 e2) e1 - e1 e2) e1 - (e1  - 2 e2) e2]
-----------------------------------------------------------------
> map(simplify,");
            2           3              4       2          2
      [e1, e1  - 2 e2, e1  - 3 e1 e2, e1  - 4 e1  e2 + 2 e2 ]
```

```
-----------------------------------------------------------------
> map(simplify,elem2puis(4,4,[e1,e2,e3,e4]));
                   2            3
            [e1, e1  - 2 e2, e1  - 3 e1 e2 + 3 e3,

                  4       2                    2
                e1  - 4 e1  e2 + 4 e1 e3 + 2 e2  - 4 e4]
-----------------------------------------------------------------
> puis2elem(1,4,[p1]);
                           [p1, 0, 0, 0]
-----------------------------------------------------------------
> puis2elem(2,4,[p1,p2]);
                               2
                    [p1, 1/2 p1  - 1/2 p2, 0, 0]
-----------------------------------------------------------------
> map(simplify,puis2elem(4,4,[p1,p2,p3,p4]));
                2                 3
     [p1, 1/2 p1  - 1/2 p2, 1/6 p1  - 1/2 p1 p2 + 1/3 p3,

                4         2                        2
         1/24 p1  - 1/4 p1  p2 + 1/3 p1 p3 + 1/8 p2  - 1/4 p4]
-----------------------------------------------------------------
> puis2elem(4,4,elem2puis(4,4,[x,y,z,t]));

                            [x, y, z, t]
-----------------------------------------------------------------
> elem2puis(4,4,puis2elem(4,4,[x,y,z,t]));

                            [x, y, z, t]
-----------------------------------------------------------------
```