Licence de Mathématiques
Projet d'algorithmique

1 Modalités

Le projet sera écrit en MAPLE et sera réalisé par binômes (2 personnes). Le rapport sera rédigé à l'aide de $\LaTeX$ (une séance d'initiation est prévue en décembre sur ce traitement de texte). Un dossier comportant le rapport et un listing commenté des programmes écrits sera rendu avant le lundi 8 janvier 1995 au secrétariat de la licence. Il sera apporté un soin tout particulier à la lisibilité et à la clarté des programmes. Le projet fera l'objet d'une mini-soutenance lors d'une séance de travaux dirigés.

2 Rappels de mathématiques

2.1 Polynômes symétriques

On suppose un corps commutatif K et n un entier fixés. On note $K[X_1, \ldots, X_n]$ la K-algèbre des polynômes en n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$.

On note $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n, *i.e.* l'ensemble des applications bijectives de $[1, n]$ dans $[1, n]$. Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ définit un automorphisme $P \mapsto P^\sigma$, avec $P^\sigma(X_1, \ldots, X_n) = P(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$ de l'algèbre $K[X_1, \ldots, X_n]$. On dit qu'un polynôme P est *symétrique* si $P^\sigma = P$ pour toute $\sigma \in \mathcal{S}_n$ (le polynôme reste inchangé lorsque l'on permute les indéterminées).

Parmi les polynômes symétriques, on distingue trois familles pariculières : les polynômes symétriques élémentaires, les polynômes puissance et les polynômes symétriques complets. Ces trois familles sont d'une grande importance car chacune des trois permet d'exprimer tout polynôme symétrique.

Les *polynômes symétriques élémentaires* E_k sont définis pour $1 \leq k \leq n$ par

$$E_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} X_{i_1} \ldots X_{i_p}$$

On vérifie aisément que les polynômes E_k ainsi définis sont symétriques et homogènes de degré k. Par convention, les polynômes élémentaires P_k pour

k supérieur à n sont nuls.

Exemple 1 *Pour $n = 3$, les trois polynômes élémentaires sont*

$$\begin{aligned} E_1 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ E_2 &= X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 \\ E_3 &= X_1X_2X_3 \end{aligned}$$

Les *polynômes puissance* sont définis pour $k \geq 1$ par

$$P_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Les polynômes puissance P_k sont des polynômes symétriques et homogènes de degré k

Exemple 2 *Pour $n = 3$, les trois premiers polynômes puissance sont*

$$\begin{aligned} P_1 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ P_2 &= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \\ P_3 &= X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 \end{aligned}$$

Les *polynômes symétriques complets* C_k sont définis pour $k \geq 1$ par

$$C_k = \sum_{p_1+\cdots+p_n=k} X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n}$$

Exemple 3 *Pour $n = 3$, les deux premiers polynômes complets sont*

$$\begin{aligned} C_1 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ C_2 &= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 \end{aligned}$$

On admettra le résultat fondamental suivant. Tout polynôme symétrique P de $K[X_1, \dots, X_n]$ peut s'exprimer de façon polynomiale en fonction des polynômes symétriques élémentaires E_k (respectivement des polynômes puissance et des polynômes symétriques complets). Ceci signifie qu'il existe polynôme Q non nécessairement symétrique de $K[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P(X_1, \dots, X_n) = Q(E_1, \dots, E_n)$ (respectivement $P(X_1, \dots, X_n) = Q(P_1, \dots, P_n)$ et $P(X_1, \dots, X_n) = Q(C_1, \dots, C_n)$).

Exemple 4 *Pour $n = 3$, le polynôme symétrique $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$ s'écrit $E_1^3 - 3E_1E_2 + 3E_3$.*

Les trois familles de polynômes sont reliées par les formules suivantes

$$\begin{aligned}
C_kE_0 - C_{k-1}E_1 + \cdots + (-1)^{k-1}C_1E_{k-1} + (-1)^kC_0E_k &= 0 \\
P_kE_0 - P_{k-1}E_1 + \cdots + (-1)^{k-1}P_1E_{k-1} + (-1)^k kE_k &= 0 \\
P_kC_0 + P_{k-1}C_1 + \cdots + P_1C_{k-1} - kC_k &= 0
\end{aligned}$$

On utilisera ces formules pour effectuer le travail demandé.

2.2 Partitions d'un entier

Une *partition* d'un entier n est une suite décroissante d'entiers $p_1 \geq \cdots \geq p_k$ telle que $n = p_1 + \cdots + p_k$. Les entiers p_i s'appellent les *parts* de la partition. À titre d'exemple, la suite $7, 4, 4, 3, 1, 1$ est une partition de 20. On note p_n le nombre de partitions d'un entier n.

Exemple 5 *On a $p_5 = 7$ puisque l'entier 5 admet les 7 partitions*

$$\begin{aligned}
5 &= 5 \\
5 &= 4+1 \\
5 &= 3+2 \\
5 &= 3+1+1 \\
5 &= 2+2+1 \\
5 &= 2+1+1+1 \\
5 &= 1+1+1+1+1
\end{aligned}$$

Pour deux entiers n et ℓ, on note p_n^ℓ le nombre de partitions de n à parts inférieures ou égale à ℓ. On a par exemple $p_5^2 = 3$ puisque seules les 3 dernières partitions de l'entier 5 ne contiennent que des parts inférieures à 2.

Pour deux entiers n et ℓ, on note σ_n^ℓ la somme des diviseurs de n inférieurs à ℓ.

$$\sigma_n^\ell = \sum_{d|n \text{ et } d \leq \ell} d$$

Les suites d'entiers p_n^ℓ et σ_n^ℓ sont reliées par le résultat suivant que l'on admettra. Si l'on considère une algèbre à $\ell(\ell+1)/2$ indéterminées numerotées $X_{j,k}$ avec $1 \leq j \leq \ell$ et $0 \leq k \leq j$ et que l'on donne à $X_{j,k}$ la valeur $\exp(\frac{2ik\pi}{j})$, alors les polynômes puissance P_n ont pour valeur σ_n^ℓ et les polynômes complets ont pour valeur p_n^ℓ. On peut donc calculer une des deux suite à partir des valeur de l'autre en utilisant les formules reliant polynômes puissance aux polynômes complets.

3 Travail demandé

1. Écrire une fonction `Symmetric` qui teste si un polynôme est symétrique.

2. Écrire six fonctions `elem2puis`, `puis2elem`, `elem2comp`, `comp2elem`, `puis2comp` et `comp2puis` permettant respectivement d'exprimer Les polynômes puissance en fonction des polynômes élémentaires, les polynômes élémentaires en fonction des polynômes puissance etc ...

   Ces fonctions prennent en argument le nombre n d'indéterminées de l'algèbre, un entier m et une liste de $k = \inf(n, m)$ expressions. Elles rendent alors liste des expressions des m premiers polynômes demandés en fonction des k expressions fournies en argument.

   Exemple 6 *On suppose $n = 2$. L'appel* `elem2puis(2,3,[e1,e2])` *doit rendre le résultat* `[e1,e1^2-2*e2, e1^3-2*e1*e2]` *puisque les trois premiers polynômes puissance sont respectivement égaux à*

$$\begin{array}{rclcl} P_1 & = & X_1 + X_2 & = & E_1 \\ P_2 & = & X_1^2 + X_2^2 & = & E_1^2 - 2E_2 \\ P_3 & = & X_1^3 + X_2^3 & = & E_1^3 - 3E_1E_2 \end{array}$$

   Exemple 7 *On suppose $n = 2$. L'appel* `puis2elem(2,3,[p1,p2])` *doit rendre le résultat* `[p1,(p1^2 - p2)/2,0]` *puisque les deux premiers polynômes élémentaires sont respectivement égaux à*

$$\begin{array}{rclcl} E_1 & = & X_1 + X_2 & = & P_1 \\ E_2 & = & X_1X_2 & = & (P_1^2 - P_2)/2 \end{array}$$

   et que le troisième est nul par convention.

3. Écrire deux fonctions `puis2puis` et `comp2comp` permettant respectivement d'exprimer les polynômes puissance (respectivement complets) en fonctions des premiers polynômes puissance (respectivement complets).

   Ces deux fonctions prennent en argument le nombre n d'indéterminées de l'algèbre, un entier m et une liste de $k = \inf(n, m)$ expressions. Elles rendent alors la liste des m premiers polynômes puissance (respectivement complets) en fonction des k expressions fournies en argument.

   Exemple 8 *Pour $n = 2$, l'appel* `puis2puis(2,4,[p1,p2])` *devra rendre le résultat* `p2^2 - (p1^2 - p2)^2/2`.

4. Ajouter aux fonctions précédentes la possibilité de compléter la liste des variables passée en argument par des variables supplémentaires si leur nombre est insuffisant. Par exemple, l'appel à `Elem2puis(4,5,[T])` devra être équivalent à l'appel `elem2puis(4,5,[T,e1,e2,e3])`

5. Programmer des fonctions `Sigma(n,l)` et `Partition(n,l)` calculant les entiers σ_n^ℓ et p_n^ℓ. Comparer la programmation directe de `Partition` avec celle utilisant `Sigma` et `puis2comp`.

4 Exemples de résultats

```
> elem2puis(1,4,[e1]);
                                    2    3    4
                             [e1, e1 , e1 , e1 ]

------------------------------------------------------------------
> elem2puis(2,4,[e1,e2]);
               2            2
        [e1, e1  - 2 e2, (e1  - 2 e2) e1 - e1 e2,

                2                              2
            ((e1  - 2 e2) e1 - e1 e2) e1 - (e1  - 2 e2) e2]

------------------------------------------------------------------
> map(simplify,");
              2           3              4       2          2
      [e1, e1  - 2 e2, e1  - 3 e1 e2, e1  - 4 e1  e2 + 2 e2 ]

------------------------------------------------------------------
```

```
> map(simplify,elem2puis(4,4,[e1,e2,e3,e4]));
                 2           3
          [e1, e1  - 2 e2, e1  - 3 e1 e2 + 3 e3,

                4       2                    2
              e1  - 4 e1  e2 + 4 e1 e3 + 2 e2  - 4 e4]
-----------------------------------------------------------------
> puis2elem(1,4,[p1]);
                           [p1, 0, 0, 0]
-----------------------------------------------------------------
> puis2elem(2,4,[p1,p2]);
                                2
                   [p1, 1/2 p1  - 1/2 p2, 0, 0]
-----------------------------------------------------------------
> map(simplify,puis2elem(4,4,[p1,p2,p3,p4]));
              2                 3
     [p1, 1/2 p1  - 1/2 p2, 1/6 p1  - 1/2 p1 p2 + 1/3 p3,

              4         2                        2
         1/24 p1  - 1/4 p1  p2 + 1/3 p1 p3 + 1/8 p2  - 1/4 p4]
-----------------------------------------------------------------
> puis2elem(4,4,elem2puis(4,4,[x,y,z,t]));

                            [x, y, z, t]
-----------------------------------------------------------------
> elem2puis(4,4,puis2elem(4,4,[x,y,z,t]));

                            [x, y, z, t]
-----------------------------------------------------------------
```