Exemples de problèmes NP-complet

PAR ALEXIS GOYET

MARIAGES à 3 DIMENSIONS (3DM):

Définition: Étant donné trois ensembles W, X, Y (gens à marier) de même cardinal q, et $M \in W \times X \times Y$ (ensemble des mariages possibles), existe-t-il un sous-ensemble M' de M qui soit une partition de $W \times X \times Y$ (chaque personne est alors mariée une et une seule fois)?

Ce problème est NP-complet: Il est clairement dans NP (il suffit de tester, de manière non deterministe, si un M' donné convient). On va transformer 3DM en 3SAT.
Soit donc $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ un ensemble arbitraire de clauses sur les variables $u_1, u_2, ..., u_n$; on va construire une instance de 3DM satisfiable si et seulement si C l'est.
L'ensemble M sera constitué de trois parties: un pour determiner les valeurs de vérité des variables, un pour tester la satisfaction des clauses et un pour le «ramassage de miettes»

Valeurs de vérité: À chaque variable u apparaissant dans une clause de C correspond un gadget servant à déterminer sa valeur de vérité (figure 1). Il contient des éléments externes $u[i] \in W$ et $\bar{u}[i] \in W$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et des éléments internes $a_i[j] \in X$ et $b_i[j] \in Y$. Ces éléments internes ne peuvent se marier qu'avec d'autres éléments du même gadget. Chaque élément interne est dans un mariage possible (un élément de M) avec deux éléments externes, de sorte que le choix de marier $b_i[1]$ avec $u[1]$ entraîne que tous les $b_i[j]$ seront mariés avec $u[i]$, choisissant ainsi pour u la valuation *true* (de même pour *false*).

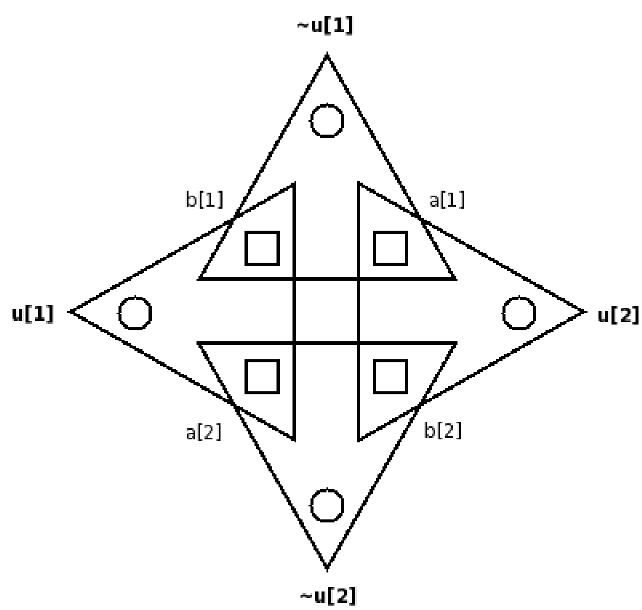

fig 1
gadget de u, avec $m = 2$

Satisfaction: À la clause c_j de C va ensuite correspondre un gadget verifiant sa satisfiabilité. Celui-ci comporte deux éléments internes $s_1[j] \in X$ et $s_2[J] \in Y$. De plus, si le littéral u (respectivement $\bar{u}$) appartient à c_i, alors $(s_1[j], s_2[J], u)$ (respectivement $(s_1[j], s_2[J], \bar{u}))$ appartient à M. Pour que $s_1[j]$ et $s_2[J]$ soient dans un mariage de M', il faut donc que l'un au moins des littéraux présents dans c_j ne soit pas encore marié, c'est à dire que la bonne valeur de vérité ait été choisie pour cette variable (par le gadget précédant).

Ramasseur de miettes: D'après ce qui précède, la satisfiabilité de C est une condition necessaire à l'existence de M'. Pour qu'elle soit suffisante, il faut rajouter une possibilité de mariage à tous les $u[j]$ et $\bar{u}[j]$ qui n'ont pas étés utilisé pour la satisfaction des clauses. On le fait en ajoutant un grand gadget possédant $m(n-1)$ paires d'éléments internes $g_1[k]$ et $g_2[k]$, chacun des littéraux pouvant se marier avec la paire $g_1[k]$, $g_2[k]$. Néanmoins, comme il y a $m\,n$ littéraux en tout, il reste nécessaire que m d'entre eux aient trouvé un mariage dans un gadget de satisfaction, autrement dit que toutes les clauses aient été satisfaites.

RECOUVREMENT par des TRIPLETS (X3C):

On obtient trivialement 3DM par réduction de ce problème, mais il est utile pour prouver que le recouvrement par des triangles est NP-complet.

Définition: Étant donné un ensemble X de cardinal $3q$, et un ensemble C de triplets de X, existe-t-il un sous-ensemble C' de C qui soit une partition de X ?

Ce problème est NP-complet: Pour toute instance de 3DM, il suffit de prendre pour X la réunion (dans 3DM) $W' \cup X' \cup Y'$, et pour C l'ensemble des triplets de X correspondant à un mariage de M.

PARTITION en TRIANGLES:

Définition: Étant donné un graphe $G = (V, E)$, avec $|V| = 3q$, existe-t-il une partition T de V en q triangles (sous graphes complets à trois sommets).

Ce problème est NP-complet: On va transformer X3C en PARTITION en TRIANGLES. Cette preuve est un exemple de *remplacement local*, car des éléments de X3C (les triplets) auront un équivalent direct dans le nouveau problème, sans affecter la structure globale de l'instance de X3C.
Soit donc X ($|X| = 3q$) et $C \subseteq X^3$ une instance arbitraire de X3C. On construit $G = (V, E)$ de la manière suivante:

D'une part, pour chaque élément x de X on crée un élément x dans V.

D'autre part, lorsque le triplet (x, y, z) est dans C, on le représente par un gadget à 6 éléments internes $a[1]...a[6] \in V$ comme sur la figure 2:

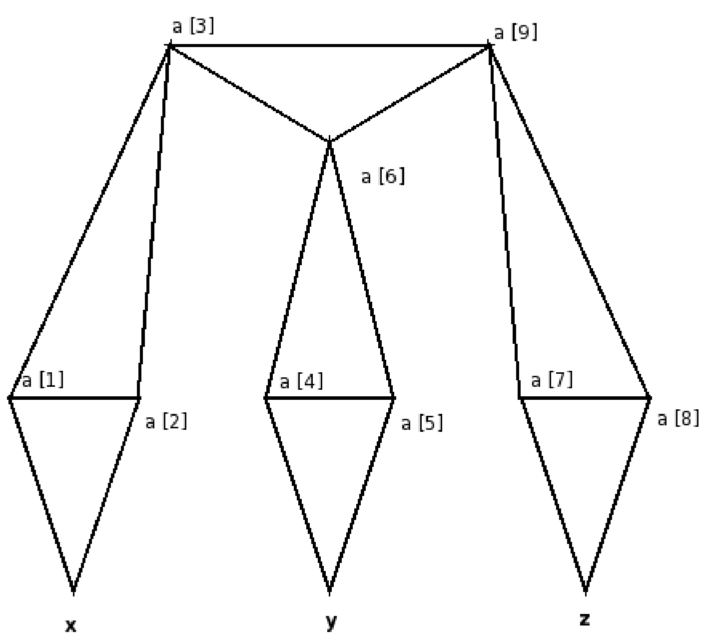

fig 2
le gadget représentant le triplet (x, y, z)

Une partition de V en triangles doit, soit contenir les trois triangles ayant x, y et z comme sommet, soit aucun (selon que le triangle $a[3]\,a[6]\,a[9]$ est choisit ou non). Le premmier cas représente le fait que (x, y, z) soit choisit pour construire la partition T, le second qu'il ne le soit pas. Le fait que x, y et z soient dans un triangle de T est alors équivalent au fait que C' contienne (x, y, z). Le résultat en découle car la structure globale de l'instance de X3C n'a pas été modifiée par cette transformation.

3-COLORIABILITÉ

Définition: Étant donné un graphe (G, V), peut on le colorier avec 3 couleurs ?

Ce problème est NP-complet: Il est trivialement dans NP. On va transformer 3SAT en ce problème. On utilisera un gadget pour determiner les valeurs de vérité des variables, et un par clause pour tester leur satisfiabilité.

Valeur de vérité: Ce gadget comporte tout d'abord un triangle dont les sommets sont notés *true, false* et *red*; on appellera ainsi les couleurs qui seront choisies pour ces sommets. Pour chaque variable x_i, on ajoute ensuite deux sommets x_i et $\bar{x}_i$, reliés entre eux et à *red*. La valeur de vérité de x_i est alors identifiée à la couleur du littéral x_i.

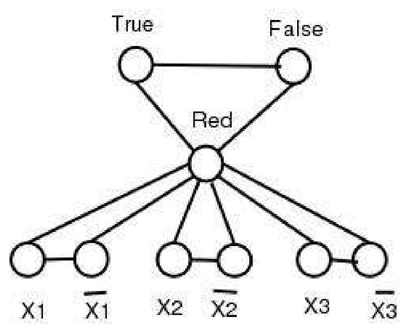

fig 3
gadget déterminant les valeurs de vérités

Satisfaction: On ajoute ensuite pour chaque clause un gadget comme celui de la figure 4.

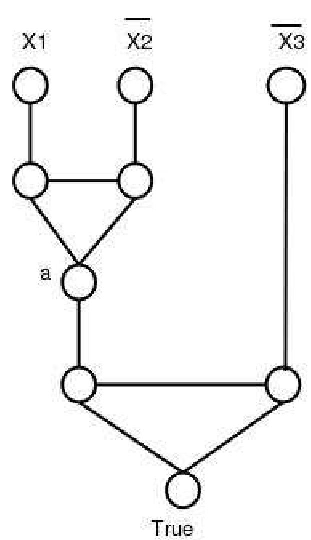

fig 4
gadget de satisfaction de $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

Les deux triangles des ce gadget agissent comme de véritables portes logiques OR: si les deux sommets d' «entrée» sont coloriés avec *false*, le sommet de sortie (par exemple a pour le triangle du dessus) ne peut pas être colorié avec *true* (forcemment utilisé pour l'un des sommet entre a et les entrées). Comme le dernier sommet est déjà colorié avec *true*, l'un au moins des littéraux doit être colorié avec *true*. Inversement, si l'instance de 3SAT est satisfiable, il suffit de choisir pour les littéraux la couleur correspondant à leur valeur de vérité pour arriver à colorier le graphe.

3-COLORIABILITÉ d'un graphe sans sommet de degré superieur à 4

Ce problème est NP-complet: Soit (G, V) un graphe quelconque, et c_1, ..., c_q ses sommets de degré superieur à 4. On va construire G' en remplaçant dans G chaque c_i par le gadget H_k, où k est le degré de c_i; ceci en conservant la 3-coloriabilité.

On construit H_3 comme sur la figure 5. Il possède 5 sommets internes et 3 externes, numérotés.

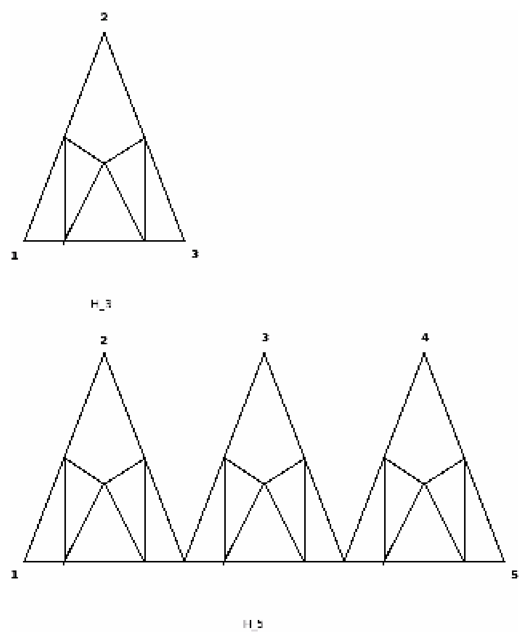

fig 5
H_3 et H_5

On construit ensuite récursivement H_{k+1} à partir de H_k en remplaçant le sommet k de H_k par H_3. Les H_k n'ont pas de sommet de degré superieur à 4, et tout leurs sommets externes doivent être coloriés avec la même couleur (celle du sommet central dans H_3, par exemple). On remplace alors c_i par H_k dans G en recollant toutes les arrêtes qui pointaient vers c_i avec un sommet externe de H_k. Cette étape n'ajoute pas non plus de sommet de degré superieur à 4, et on a bien conservé la 3-coloriabilité.