# Suites automatiques

Nicolas Provost

13 février 2007

**Résumé**

Les suites automatiques forment une classe simple de suites que peut générer un ordinateur. Après en avoir donné plusieurs définitions équivalentes, on s'intéressera au théorème de Christol. Ce théorème fait le lien entre ces suites et l'algébricité des séries formelles sur les corps de fractions rationnelles $\mathbb{F}_q(X)$.

## 1 Automates

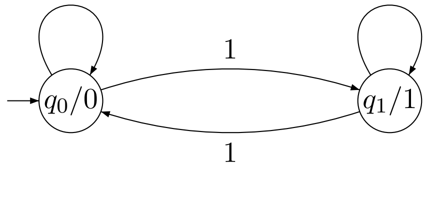
On va considérer des automates avec fonction de sortie.

**Définition 1.** *Un automate fini est la donnée de* $(Q, i, \Sigma, \delta, \Gamma, \varphi)$ *où* $Q$ *est l'ensemble des états,* $i \in Q$ *est l'état initial,* $\Sigma$ *est l'alphabet d'entrée,* $\delta$ *une fonction de* $Q \times \Sigma$ *dans* $Q$*,* $\Gamma$ *l'alphabet de sortie et* $\varphi$ *la fonction de sortie de* $Q$ *dans* $\Gamma$.

On remarque que pour obtenir un automate traditionnel il suffit de prendre $\Gamma = \{0, 1\}$ et de considérer $q$ état final ssi $\varphi(q) = 1$.

**Définition 2.** *Une suite* $(a_n)_{n\geq 0}$ *sur l'alphabet* $\Sigma$ *est engendrée par un* $q$*-automate s'il existe un automate* $\mathcal{A} = (Q, i, \{0, 1, ..., q-1\}, \delta, \Sigma, \varphi)$ *dit* $q$*-automate tel que* $a_n$ *soit la valeur rendue lors de la lecture du mot* $n_0...n_{t-1}n_t$ *où* $n = \sum_{k=0}^{t} n_k q^k$ *est l'écriture en base* $q$ *:* $a_n = \varphi(\delta(i, n_0...n_{t-1}n_t))$.

**Exemple 1.** *La suite de Thue-Morse est engendrée par le 2-automate suivant :*

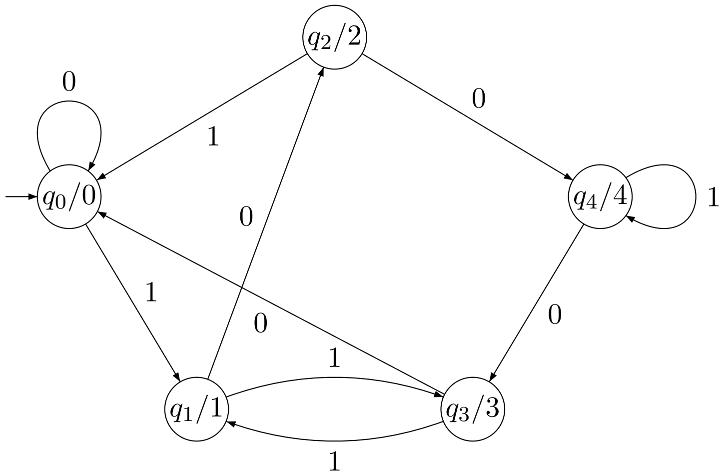



*On obtient les termes de la suite :* 011010011001...

$$a_0 : q_0 \xrightarrow{0} q_0/0, \quad a_1 : q_0 \xrightarrow{1} q_1/1, \quad a_2 : q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_1/1$$

On remarque que le sens de lecture choisi dans cet exemple ne change pas la suite. En fait on peut démontrer que s'il existe un $q$-automate qui engendre une suite en lecture directe en base $q$ alors il existe un $q$-automate qui engendre la suite en lecture inverse et réciproquement.

**Exemple 2.** *On peut ainsi donner l'automate qui rend le reste de la division euclidienne de $n$ par 5 lorsqu'on place $n$ écrit en binaire par puissance descendante en entrée. Il illustre bien que l'alphabet de sortie d'un 2-automate n'est pas forcément la paire $\{0,1\}$ (identifié à $\mathbb{F}_2$ plus loin).*




## 2 $q$-noyau

Soit $q \geq 2$ un entier.

**Définition 3.** *Pour une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ sur un alphabet $\Sigma$ on définit son $q$-noyau que l'on notera $N_a$ par :*

$$N_a = \{(a_{q^k n+r})_{n\geq 0}, k \geq 0, r \in [0, q^{k-1}]\}.$$

Le $q$-noyau nous intéresse lorsqu'il n'est pas "trop gros" et qu'il contraint les suites à coïncider avec leurs propres sous-suites extraites de pas $q^k$. Or il y a un nombre au plus dénombrable de telle suite, on s'intéresse alors au cas fini.

Lorsque le $q$-noyau est fini, il est facile de le calculer par ordinateur (et donc de déterminer s'il est fini). Il suffit de construire récursivement les ensembles $X_k$ donnés par : $X_0 = \{(a_n)_{n\geq 0}\}$ et $X_{k+1} = X_k \cup \{(b_{qn+r})_{n\geq 0} | (b_n)_{n\geq 0} \in X_k, r \in [0, q-1]\}$. S'il existe $k$ tel que $X_k = X_{k+1}$ alors c'est la valeur du $q$-noyau, ce dernier est alors fini.

**Exemple 3.** *On s'intéresse au 2-noyau de la suite de Thue-Morse $(\varepsilon_n)_{n\geq 0} = 011010011001...$*

*D'après la définition par le 2-automate, on a $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_n$ car on ajoute un 0 en début de lecture et de même $\varepsilon_{2n+1} = 1 - \varepsilon_n$ car on ajoute alors un 1.*

*On a $X_1 = \{(\varepsilon_n), (1-\varepsilon_n)\}$ et $X_2 = \{(\varepsilon_n), (1-\varepsilon_n), (1-(1-\varepsilon_n))\} = X_1$.*

*Donc $N_\varepsilon = \{(\varepsilon_n)_{n\geq 0}; (1-\varepsilon_n)_{n\geq 0}\}$ et le 2-noyau est fini.*

**Exemple 4.** *On definit la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ de Rudin-Shapiro par $r_n = 1$ si le nombre de fois qu'apparait 11 dans l'écriture binaire de $n$ est paire et $-1$ sinon.*
*On a : $X_1 = \{(r_n), (r_{2n+1})\}$ car $r_{2n} = r_n$.*
*Puis : $X_2 = \{(r_n), (r_{2n+1}), (r_{4n+3})\}$ car $r_{4n+1} = r_n$.*
*Et : $X_3 = \{(r_n), (r_{2n+1}), (r_{4n+3}), (r_{8n+3})\}$ car $r_{8n+7} = r_{2n+1}$.*
*Enfin : $X_4 = \{(r_n), (r_{2n+1}), (r_{4n+3}), (r_{8n+3})\}$ car $r_{16n+3} = r_{8n+3}$ et $r_{16n+11} = r_{4n+3}$.*
*D'où le 2-noyau $N_r = \{(r_n), (r_{2n+1}), (r_{4n+3}), (r_{8n+3})\}$ est fini.*

# 3 Morphisme

**Proposition 1.** *Soient $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ un morphisme, $a \in \Sigma$ une lettre et $x \in \Sigma^* \setminus \{\epsilon\}$ tels que $h(a) = ax$ alors le mot $h^\infty(a) = axh(x)h^2(x)...$ est un point fixe de $h$.*

**Définition 4.** *Pour définir un morphisme $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$, il faut et il suffit de le définir sur $\Sigma$ à valeurs dans $\Sigma^*$. On dit alors que le morphisme est uniforme de longueur $q$ si les images des lettres sont des mots de longueur $q$. $\boldsymbol{a} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ est un point fixe si $h(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.*

*Si $(a_n)_{n\geq 0} = h^\infty(a)$ alors on dit qu'elle est purement morphique. L'image lettre à lettre d'une suite purement morphique est dite morphique.*

**Exemple 5.** *La suite de Thue-Morse peut être introduite comme point fixe du morphisme défini par $h(0) = 01$ et $h(1) = 10$ :*

$$h^\infty(0) = 01h(1)h^2(1)... = 01101001... .$$

*Donc la suite de Thue-Morse est purement morphique avec un morphisme uniforme de longueur 2.*

**Exemple 6.** *La suite dite de Fibonacci est aussi morphique mais n'est pas engendrée par un morphisme uniforme. $h(0) = 01$ et $h(1) = 0$ donne $h^\infty(0) = 0100101001001....$*

# 4 Suites $q$-automatiques

**Théorème 1.** *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite sur un alphabet $\Sigma$ et $q \geq 2$.*
*Les propositions suivantes sont équivalentes :*

*(i) $(a_n)_{n\geq 0}$ est engendrée par un $q$-automate*

*(ii) $(a_n)_{n\geq 0}$ a un $q$-noyau fini*

*(iii) $(a_n)_{n\geq 0}$ est morphique avec un morphisme uniforme de longueur $q$*

*Dans ce cas on dit que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est $q$-automatique.*

*Démonstration :*

(i) $\Rightarrow$ (ii). On dispose d'un $q$-automate $\mathcal{A} = (Q, q_0, \{0, 1, ..., q-1\}, \delta, \Gamma, \varphi)$ qui engendre $(a_n)_{n\geq 0}$. On note $(n)_q$ l'écriture inversée de $n$ en base $q$. On rappelle que : $a_n = \varphi(\delta(q_0, (n)_q))$. Or $(q^i n + j)_q = j00...0(n)_q = w(n)_q$ où l'on a noté $w = j0^{i-1}$.

On a alors : $a_{q^i n+j} = \varphi(\delta(q_0, w(n)_q)) = \varphi(\delta(\delta(q_0, w), (n)_q))$. Mais il y a un nombre fini d'état donc un nombre fini de $\delta(q_0, w)$ lorsque $i$ et $j$ varient. Ainsi le $q$-noyau est bien fini.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). On a :$N_a = \{(a_n^{(1)})_{n\geq 0}, (a_n^{(2)})_{n\geq 0}, ..., (a_n^{(d)})_{n\geq 0}\}$, avec $(a_n^{(1)})_{n\geq 0} = (a_n)_{n\geq 0}$. On définit la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ sur l'alphabet $\Sigma^d$ par $V_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, ..., a_n^{(d)})$.

Pour $j \in [0, q-1]$, $V_{qn+j} = (a_{qn+j}^{(1)}, a_{qn+j}^{(2)}, ..., a_{qn+j}^{(d)}) = (a_n^{\sigma_j(1)}, a_n^{\sigma_j(2)}, ..., a_n^{\sigma_j(d)})$ par définition du $q$-noyau. On dispose alors de $h_j$ morphisme défini sur $\Sigma^d$ par $h_j(x_1, x_2, ..., x_d) = (x_{\sigma_j(1)}, x_{\sigma_j(2)}, ..., x_{\sigma_j(d)})$ et on a $h_j(V_n) = V_{qn+j}$. On définit alors le morphisme uniforme de longueur $q$ sur $\Sigma^d$ par $h(\mathbf{x}) = h_1(\mathbf{x})h_2(\mathbf{x})...h_{q-1}(\mathbf{x})$. On a $(V_n)_{n\geq 0} = h^\infty(V_0)$ puis $(a_n)_{n\geq 0}$ en est la projection sur la première coordonnée. Ainsi $(a_n)_{n\geq 0}$ est morphique avec un morphisme uniforme de longueur $q$.

(iii) $\Rightarrow$ (i).On a $(b_n)_{n\geq 0} = h^\infty(b)$ où $h$ est un morphisme uniforme de longueur $q$ sur $\Sigma'$ et $a_n = f(b_n)$.

On considère l'automate $\mathcal{A} = (\Sigma', b, \{0, 1, ..., q-1\}, \delta, \Sigma, f)$ où $\delta$ est défini par : $h(x) = \delta(x, 0)\delta(x, 1)...\delta(x, q-1)$. On a alors bien $a_n = f(\delta(b, (n)_q))$ où $(n)_q$ est l'écriture en base $q$ avec les puissances descendantes. En effet on montre par récurrence que :

$h^k(b) = \delta(b, (0)_q)\delta(b, (1)_q)...\delta(b, (q^k-1)_q)$.

On a : $h^{k+1}(b) = h(\delta(b, (0)_q))...h(\delta(b, (q^k-1)_q))$

$= \delta(\delta(b, (0)_q), 0)...\delta(\delta(b, (0)_q), q-1)...\delta(\delta(b, (q^k-1)_q), 0)...\delta(\delta(b, (q^k-1)_q), q-1)$

$= \delta(b, (0)_q)...\delta(b, (q-1)_q)...\delta(b, (q^{k+1}-q)_q)...\delta(b, (q^{k+1}-q+(q-1))_q)$.

Donc $(a_n)_{n\geq 0}$ est engendré par le $q$-automate $\mathcal{A}$.

# 5 $q$-opérateurs de Cartier

On va introduire ici les $q$-opérateurs de Cartier. Cet outil est crucial lors de la démonstration du théorème de Christol. Il permet de faire le lien entre les séries formelles et le caratère $q$-automatique de la suite des coefficients.

**Définition 5.** *On appelle série formelle de Laurent les séries de la forme* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n X^n$ *où* $n_0$ *est un entier relatif. On les note alors* $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n X^n$ *en convenant* $a_n = 0$ *pour* $n \leq n_0$.

**Définition 6.** *On définit les $q$-opérateurs de Cartier* $\Lambda_0, \Lambda_1, ..., \Lambda_{q-1}$ *agissant sur les séries formelles de Laurent* $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n X^n$ *par :*

$$\Lambda_j(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n X^n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{qn+j} X^n.$$

**Proposition 2.** *Soient $F$ et $G$ deux séries formelles de Laurent sur $\mathbb{F}_q$. Alors pour $j \in [0, q-1]$ et $n \geq 1$ on a :*

$$\Lambda_j(F^{q^n}G) = F^{q^{n-1}}\Lambda_j(G).$$

*Démonstration :* Soit $G = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k X^k$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \Lambda_j(X^{q^n}G) &= \Lambda_j(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k X^{k+q^n}) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{(qk+j)-q^n} X^k \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{(q(k-q^{n-1})+j)} X^k \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{(qk+j)} X^{k+q^{n-1}} \\ &= X^{q^{n-1}}\Lambda_j(G). \end{aligned}$$

Puis par récurrence sur i on montre que : $\Lambda_j((X^i)^{q^n}G) = (X^i)^{q^{n-1}}\Lambda_j(G)$

$$\begin{aligned} \text{en effet : } \Lambda_j((X^i)^{q^n}G) &= \Lambda_j(X^{q^n}((X^{i-1})^{q^n}G)) \\ &= X^{q^{n-1}}\Lambda_j((X^{i-1})^{q^n}G) \\ &= (X^i)^{q^{n-1}}\Lambda_j(G) \text{ (par H.R.)} \end{aligned}$$

Et avec la linéarité des $q$-opérateurs de Cartier on obtient le résultat.

# 6 Théorème de Christol

Le théorème donne l'équivalence entre l'algébricité d'une série formelle à coefficients dans un corps fini et la nature automatique de la suite des coefficients. Ainsi on peut détecter si une série formelle est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$ grâce à un ordinateur.

**Théorème 2.** *Soient $p$ premier et $q = p^a$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{F}_q$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) La série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$ ;*

*(ii) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est $q$-automatique.*

*Démonstration :*

(i) $\Rightarrow$ (ii). F=$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$ donc les $F, F^q, F^{q^2}, ...$ sont linéairement dépendants. Il existe des polynômes $A_0, A_1, ..., A_l$ dans $\mathbb{F}_q[X]$ avec $A_l$ non nul tel que :

$$A_0F + A_1F^q + ... + A_lF^{q^l} = 0$$

Soit $k$ le plus petit $i$ tel que $A_i \neq 0$. Si $k \neq 0$ on applique $\Lambda_j$ à cette relation :

$$\Lambda_j(A_kF^{q^k}) + \Lambda_j(A_{k+1}F^{q^{k+1}}) + ... + \Lambda_j(A_lF^{q^l}) = 0$$

Par la propriété 2 on a :

$$\Lambda_j(A_k)F^{q^{k-1}} + \Lambda_j(A_{k+1})F^{q^k} + ... + \Lambda_j(A_l)F^{q^{l-1}} = 0$$

Mais comme $A_k \neq 0$ et $A_k = \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i(A_k)^q X^i$, alors il existe $i$ tel que $\Lambda_i(A_k) \neq 0$.
On a alors remplacé $k$ par $k-1$ ce qui contredit sa minimalité : $k = 0$.

On pose $G = F/A_0$. C'est une série formelle de Laurent et :

$$G = B_1 G^q + B_2 G^{q^2} + ... + B_l G^{q^l}$$

où $B_i = -A_i A_0^{q^i - 2}$ sont des polynômes.
On pose $m = max\{deg(A_0), deg(B_1), ..., deg(A_l)\}$ et $\mathcal{N} = \{\sum_0^l C_i G^{q^i} | C_i \in \mathbb{F}_q[X], deg(C_i) \leq m\}$.
$\mathcal{N}$ est fini, contient $F = A_0 G$ et est stable par les $\Lambda_j$ :

$$H = \sum_{i=0}^{l} C_i G^{q^i} = C_0 G + \sum_{i=1}^{l} C_i G^{q^i} = \sum_{i=1}^{l} (C_0 B_i + C_i) G^{q^i}.$$

Puis :

$$\Lambda_j(H) = \sum_{i=1}^{l} \Lambda_j(C_0 B_i + C_i) G^{q^{i-1}} \in \mathcal{N}.$$

Car $deg(\Lambda_j(C_0 B_i + C_i)) \leq 2m/q \leq m$.

Le $q$-noyau est alors fini car ses suites forment des séries de $\mathcal{N}$. Ainsi $(a_n)_{n\geq 0}$ est $q$-automatique.

(ii) $\Rightarrow$ (i). On dispose du $q$-noyau fini $N_a = \{(a_n^{(1)})_{n\geq 0}, ..., (a_n^{(d)})_{n\geq 0}\}$ avec $a_n^{(1)} = a_n$.
On définit $F_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} X^n$. Or :

$$F_i = \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{qm+k}^{(i)} X^{qm+k} = \sum_{k=0}^{q-1} X^k (\sum_{m=0}^{\infty} a_{qm+k}^{(i)} X^m)^q$$

D'où $F_i \in Vect(F_j^q, j \in [1,d])$, puis $F_i^q \in Vect(F_j^{q^2}, j \in [1,d])$ et donc :

$$F_i, F_i^q \in Vect(F_j^{q^2}, j \in [1,d])$$

Une récurrence immédiate donne alors :

$$F_1, F_1^q, ..., F_1^{q^d} \in Vect(F_j^{q^{d+1}}, j \in [1,d])$$

Mais $Vect(F_j^{q^{d+1}}, j \in [1,d])$ est de dimension au plus d. Ainsi $F_1, F_1^q, ..., F_1^{q^d}$ sont liées sur le corps $\mathbb{F}_q(X)$. La série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$.

**Exemple 7.** *Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ la suite de Thue-Morse. Elle est 2-automatique.*
*On a $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_n$ et $\varepsilon_{2n+1} = 1 - \varepsilon_n$. En notant $F = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n$ on a :*

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} X^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n+1} X^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varepsilon_n) X^{2n+1} \\ &= F^2 + X(\tfrac{1}{1-X} - F)^2 = (1+X)F^2 + \tfrac{X}{(1+X)^2} \end{aligned}$$

*D'où dans $\mathbb{F}_2(X)$ : $(1+X)^3 F^2 + (1+X)^2 + X = 0$ et $F$ est algèbrique.*

# 7 Autres questions autour des suites automatiques

Les suites automatiques soulèvent d'autres questions et notamment les propriétés des nombres de la forme : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{q^n}$. Quelle est l'influence de $(a_n)_{n\geq 0}$ sur le caractère rationnel, algèbrique ou encore normal de ces nombres ?

On a notamment le résultat dû à Cobham donnant l'équivalence pour $a_n \in \{0,1\}$ entre :

(i) La série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_2(X)$ et sur $\mathbb{F}_3(X)$ ;

(ii) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est ultimement périodique.

En effet (ii)$\Rightarrow$(i) étant clair, on étudie la réciproque. En effet une suite qui est 2-automatique et 3-automatique est ultimement périodique. On peut généraliser le résultat avec $p$ et $q$ multiplicativement indépendants.

Pourtant la conjecture $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ algébrique sur $\mathbb{Q}$ équivaut à $(a_n)_{n\geq 0}$ ultimement périodique reste indémontrée.

On peut aussi chercher une condition sur les coefficients de l'indépendance algébrique des séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ à coefficients dans un même corps fini.

Le lien entre automate et algébricité laisse entrevoir un champ de recherche en théorie des nombres et en algèbre. Cela permet d'explorer certains nombres par informatique et de mieux comprendre leurs propriétés.

**Remerciements :** Je tiens à remercier Mr Jean-Paul Allouche pour m'avoir si rapidement reçu et m'avoir aidé dans ce projet.

## Références

Jean-Paul Allouche et Jeffrey Shallit, Automatic sequences

Jean-Paul Allouche, Suites automatiques et série formelles algébriques

Jean-Paul Allouche, Sur la complexité des suites infinies