Motifs inévitables

Anisse Ismaïli

13 janvier 2009

$$\epsilon$$
$$\alpha$$
$$\alpha\beta$$
$$\beta\alpha$$
$$\alpha\beta\alpha$$
$$\beta\alpha\beta$$
$$\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha$$
$$\gamma\beta\gamma\alpha\beta\gamma$$
$$\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha$$
$$\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha\delta\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha$$
$$\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha\delta\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha\xi\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha\delta\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha$$

Ces motifs sont *inévitables*. Cela signifie que tout mot suffisemment grand en contient toujours au moins une occurrence. Par exemple, vous êtes à une soirée de Noël au gymnase et une centaine de personnes dansent sur fond de musique techno (connue pour n'utiliser que peu de sons différents, disons 8). Alors vous êtes sur que si la musique est suffisemment longue, elle contient au moins une occurence de ces motifs, qui sont alors 8-inévitables. Ici, on montrera la décidabilité de l'inévitabilité d'un motif par *l'algorithme de Zimin*. Et on donnera quelques résultats sur les motifs binaires.

1 Définitions et propriétés de base

1.1 Motifs et évitabilité

Définition 1. On utilisera deux alphabets différents. Le premier, $A = \{a, b, ..\}$, fini, et composé de lettres ou de nombres, est l'*alphabet usuel* avec lequel on construit les *mots* ordinaires. Comme par exemple $u = 1011011000111$, ou $v = 0000100010111$ sur $A = \{0, 1\}$. Le second, $E = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ est l'*alphabet des variables*, avec lequel on construit les *motifs*. Comme par exemple $p = \alpha\alpha\beta\beta\beta\alpha$.

Définition 2. Soit un morphisme $h : E^* \to A^*$ qui substitue chaque variable par un mot non vide de A^*. Le *language associé au motif* $p \in E^*$ est le language sur A contenant tout les mots $h(p)$. On le note $p(A^+)$.

Définition 3. On dit qu'un mot $w \in A^*$ *rencontre* le motif p si $Facteurs(w) \cap p(A^+) \neq \emptyset$. C'est à dire, si il contient un élément du language associé au motif p comme facteur. De la même façon, on dit que p *apparait* dans w, sinon il l'évite.

Remarque 4. Ces définitions s'appliquent aussi aux mots infinis $w \in A^\omega$.

Exemple 5. Considérons le motif $p = \alpha\alpha\beta\beta\alpha$. Le motif associé au language p est $p(A^+) = \{uuvvu | u, v \in A^+\}$. Le mot 1011011000111 contient p (par le morphisme $h : \alpha \longmapsto 011, \beta \longmapsto 0$).

Définition 6. Étant donné deux motifs p et p', on peut considérer p' comme un mot, et voir si p apparait dans p', dans quel cas on note : $p|p'$. Quand on a $p|p'$ et $p'|p$, p et p' sont *équivalents*, c'est à dire qu'ils diffèrent par une permutation de E.

Exemple 7. On a : $\alpha\alpha\alpha|\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta$ et on a : $\alpha\beta\alpha \Leftrightarrow \beta\alpha\beta$.

Définition 8. Un motif p est *évitable sur l'alphabet* A si il existe une infinité de mots de A^* qui évitent p. C'est équivalent à l'existence d'un mot infini dans A^ω qui évite p. Inversement, si tout mot suffisemment long de A^* rencontre p, alors p est *inévitable sur* A.

Définition 9. Un motif est *k-évitable* si et seulement si il est évitable sur n'importe quel alphabet à k lettres. Un motif qui n'est pas k-évitable est *k-inévitable.*

Exemple 10. Le motif $p = \alpha\alpha = \alpha^2$ est 2-inévitable, car tout mot de longueur au moins 4, sur un alphabet binaire, contient au moins un carré. Mais p est 3-évitable.

Définition 11. Un motif qui est évitable sur un certain A sera simplement dit *évitable.* Un motif qui est inévitable pour tout A sera simplement dit *inévitable.*

Remarque 12. L'évitabilité et l'inévitabilité d'un motif seront l'objet de la section 2. À k fixé, la k-évitabilité et la k-inévitabilité d'un motif seront l'objet de la section 3.

Proposition 13. *On a la hiérarchisation suivante :*

$$\textit{2-évitable} \Rightarrow \textit{3-évitable} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \textit{k-évitable} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \textit{évitable}$$
$$\textit{2-inévitable} \Leftarrow \textit{3-inévitable} \Leftarrow \ldots \Leftarrow \textit{k-inévitable} \Leftarrow \ldots \Leftarrow \textit{inévitable}$$

Définition 14. On définit *l'indice d'évitabilité* $\mu(p)$ d'un motif p comme le plus petit entier k tel que p est k-évitable. Par exemple, $\mu(\alpha^2) = 3$.

1.2 Puissances, et motifs de Zimin

1.2.1 Puissances

Définition 15. Le *mot infini de Thue-Morse* $abbabaab...$ est le point fixe du morphisme binaire $\theta : a \longmapsto ab, b \longmapsto ba$. On pose $u = abcacbabcbac...$ le point fixe du morphisme ternaire $\mu : a \longmapsto abc, b \longmapsto ac, c \longmapsto b$.

Remarque 16. Le motif $\alpha\alpha\alpha$ est évité par le mot infini de Thue-Morse. Donc pour $n \geq 3$, α^n est 2-évitable. Le mot $u = abcacbabcbac...$ évite le motif α^2, qui est donc 3-évitable.

La classe des puissances α^n d'une variable unique est la classe de motifs la plus simple. $\alpha^0 = \epsilon$ et $\alpha^1 = \alpha$ sont trivialement inévitables, puisqu'elles sont rencontrées dans n'importe quel mot non-vide. α^2 est 2-inévitable mais 3-évitable. Et pour $n \geq 3$, α^n est 2-évitable.

1.2.2 Motifs de Zimin

Les seuls motifs inévitables que nous avons vus pour le moment sont ϵ et α. Avec deux variables α et β, nous pouvons construire le motif $\alpha\beta$ qui est évidemment inévitable : tout mot de longueur au moins 2 en contient une occurence. Le motif $\alpha\beta\alpha$ est plus intéressant :

Proposition 17. *Le motif $\alpha\beta\alpha$ est inévitable. Plus précisemment, si $|A| = k$, tout mot de longueur au moins 2k+1 contient une occurence de $\alpha\beta\alpha$, et cette borne est serrée.*

Preuve. Soit $w \in A^*$ un mot de longueur au moins $2k + 1$. Alors une des lettres de A (comme nous sommes à permutation de A près, nous pouvons dire a), apparait au moins 3 fois dans w. On écrit $w = w_0 a w_1 a w_2 a w_3$. Soit alors $h : (h(\alpha) = a, h(\beta) = w_1 a w_2)$ est un morphisme non-effaçant et $h(\alpha\beta\alpha)$ est un facteur de w. Si $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, alors $w = a_1 a_1 a_2 a_2 ... a_k a_k$ est un mot de longueur $2k$ qui évite $\alpha\beta\alpha$.

Proposition 18. *Soit p un motif inévitable sur A, et ζ une variable qui n'a pas d'occurences dans p. Alors le motif $p\zeta p$ est inévitable sur A.*

Preuve. Soit $k = |A|$. Comme p est inévitable sur A, il existe un entier l tel que tout mot $w \in A^l$ contient p. A^l est un ensemble fini de k^l mots. Soit $N = k^l(l+1)+l$, et soit $w \in A^N$. Le mot w peut être vu comme la concaténation de k^l+1 mots de longueur l, séparé par de simples lettres. Parmis ces k^l+1 facteurs de longueur l, au moins deux sont égaux (en vertue du théorème des $k^l + 1$ chaussettes dans k^l tiroirs à chaussettes), disons v. On écrit alors $w = w_0 v w_1 v w_2$ avec $|v| = l$ et $|w_1| \geq 1$. Comme v est de longueur l, il rencontre le motif p. Ainsi, il existe un morphisme non-effaçant $h : (alphabet(p))^* \to A^*$ tel que $v = v_0 h(p) v_1$. D'où $w = w_0 v_0 h(p) v_1 w_1 v_0 h(p) v_1 w_2$. En posant $h(\zeta) = v_1 w_1 v_0$, on trouve que $h(p\zeta p)$ est un facteur de w.

Définition 19. Si on applique la proposition précédente en partant du mot vide, on peut construire une famille infinie de motifs inévitables. Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ différentes variables de E. Soit $Z_0 = \epsilon$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = Z_n \alpha_n Z_n$. Les motifs Z_n sont appelés *mots de Zimin.*

Proposition 20. *Les motifs de Zimin Z_n sont tous inévitables.*

Preuve. Soit A un alphabet fini. Nous avons vu que $Z_0 = \epsilon$, $Z_1 = \alpha_0$ et $Z_2 = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_0$ sont inévitables sur A. Si Z_n est inévitable sur A, d'après la proposition précédente, $Z_{n+1} = Z_n \alpha_n Z_n$ est aussi inévitable. Comme toutes les motifs de zimin Z_n sont inévitables sur tout A, ils sont inévitables.

2 Décider l'évitabilité : l'Algorithme de Zimin

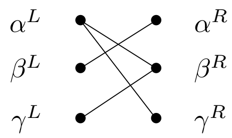
2.1 Réduction des motifs

Théorème 21. *Un motif est inévitable si et seulement si il est réductible.*

Pour montrer que l'évitabilité est décidable, nous allons montrer qu'elle est équivalente à une certaine propriété d'*irréductibilité*, définie ci-dessous, et qui peut elle-même être vérifiée par un algorithme récursif. Définissons d'abord le procédé de réduction.

Définition 22. Soit $p \in E^*$ un motif. Le *graphe d'adjacence* de p est le graphe biparti $AG(p)$ avec deux copies de E comme sommets, E^L (pour E left) et E^R (pour E right), et une arête entre ξ^L et η^R si et seulement si $\xi\eta$ est un facteur de p.

Exemple 23. Le graphe d'adjacence de $\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha$.



Définition 24. Un sous-ensemble F de $alphabet(p) \subset E$ est appelé *partie libre* si il n'existe pas de chemin dans $AG(p)$ reliant un sommet gauche ξ^L à un sommet droit η^R, avec ξ et η dans F. Pour trouver toutes les parties libres, il faut determiner les composantes connexes de $AG(p)$.

Exemple 25. Dans l'exemple précédent, $AG(\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha)$ a deux composantes connexes ($\{\alpha^R, \beta^L\}$ et $\{\alpha^L, \beta^R, \gamma^L, \gamma^R\}$), et deux parties libres, $\{\alpha\}$ et $\{\beta\}$. Aucune partie libre ne contient γ car il existe un chemin de γ^L à γ^R. Aucune partie libre ne contient α ET β car il existe un chemin de β^L à α^R.

Définition 26. Étant donné un motif p et une partie libre F de p, on dit que p se *réduit en une étape à q par la suppression de F*, si q est le motif obtenu en supprimant toute les occurence des lettres de F dans p. On le notera $p \xrightarrow{F} q$. On dit que p *se réduit à* q si il existe une suite de réductions à une étape, allant de p à q. On le notera $p \xrightarrow{*} q$. Enfin, un motif p est *réductible* si il se réduit au motif vide, $p \xrightarrow{*} \epsilon$. Sinon p est *irréductible.*

Remarque 27. Pour montrer qu'un motif est irréductible, il est nécessaire d'explorer recursivement toutes les possibilités de réductions à une étape, pour s'assurer qu'aucune d'elles ne mène au motif vide.

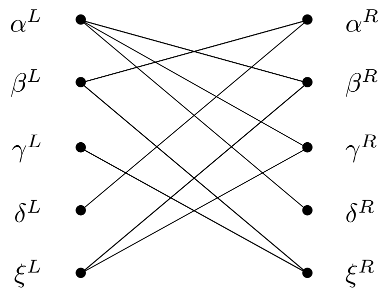
Exemple 28. Arbre des réductions de $p = \alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \gamma \arrow[r, dotted, "\{\gamma\}"] & \epsilon \\
 & \beta\gamma\beta \arrow[ur, dotted, "\{\beta\}"] \arrow[dr, dotted, "\{\gamma\}"] & & \\
\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha \arrow[ur, dotted, "\{\alpha\}"] \arrow[dr, dotted, "\{\beta\}"] & & \beta\beta & \\
 & \alpha\alpha\gamma\alpha & &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, p se réduit à ϵ par la suite de réductions $\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha \xrightarrow{\{\alpha\}} \beta\gamma\beta \xrightarrow{\{\beta\}} \gamma \xrightarrow{\{\gamma\}} \epsilon$. On montrera par la suite que cela implique qu'il est inévitable.

Remarque 29. Il est parfois nécessaire de supprimer des parties libres de plus d'un élément, comme par exemple dans l'exemple suivant.

Exemple 30. Graphe d'adjacence du motif $p = \alpha\beta\alpha\gamma\xi\beta\alpha\delta\alpha\beta\xi\gamma\xi\beta\xi$, dont on déduit les composantes connexes $\{\alpha^R, \beta^L, \gamma^L, \delta^L, \xi^R\}$ et $\{\alpha^L, \beta^R, \gamma^R, \delta^R, \xi^L\}$, et les parties libres $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, $\{\delta\}$, $\{\xi\}$, $\{\alpha, \xi\}$, $\{\beta, \gamma\}$, $\{\beta, \delta\}$, $\{\gamma, \delta\}$, $\{\beta, \gamma, \delta\}$:



Illustrant la remarque précédente, supprimer un singleton conduit à des motifs irréductibles, tandis que commencer par supprimer la partie libre $\{\alpha, \xi\}$ permet la reduction :

$$\alpha\beta\alpha\gamma\xi\beta\alpha\delta\alpha\beta\xi\gamma\xi\beta\xi \xrightarrow{\{\alpha,\xi\}} \beta\gamma\beta\delta\beta\gamma\beta \xrightarrow{\{\beta\}} \gamma\delta\gamma \xrightarrow{\{\gamma\}} \delta \xrightarrow{\{\delta\}} \epsilon$$

On peut aussi remarquer que $\beta\gamma\beta\delta\beta\gamma\beta$ est un motif de Zimin, donc inévitable, *donc* réductible.

Définition 31. *l'algorithme récursif de Zimin* :

ENTRÉES : $p \in E^*$
SORTIES : rend vrai ssi p est réductible
si $p = \epsilon$ **alors**
  Retourner **VRAI**
fin si
$AG(p) \leftarrow \emptyset$
$Sommets(AG(p)) \leftarrow alphabet(p) \times \{L, R\}$
pour tout $\xi\eta \in facteurs(p)$ **faire**
  $Arretes(AG(p)) \leftarrow Arretes(AG(p)) \cup \{\{\xi_L, \eta_R\}\}$
fin pour
$\{F_i\}_{i\in I} \leftarrow PartiesLibres(AG(p))$
pour tout $F_i \in \{F_i\}_{i\in I}$ **faire**
  $q \xleftarrow{F_i} p$
  si $AlgorithmeZimin(q)$ **alors**
    Retourner **VRAI**
  fin si
fin pour
Retourner **FAUX**

Passons maintenant à la preuve du théorème essentiel qui lie cet algorithme à l'inévitabilité d'un motif : *Un motif est inévitable si et seulement si il est réductible.*

2.2 Les motifs réductibles sont inévitables

Définition 32. Étant donné un motif p et une partie X des sommets de $AG(p)$, on note $C(X,p)$ l'ensemble de sommets de $AG(p)$ qui sont dans la même composante connexe que X. $C(X,p)$ est la composante connexe de $AG(p)$ engendrée par X. On note $C_L(X,p) = \{\xi \in E|\xi^L \in C(X,p)\}$ et $C_R(X,p) = \{\xi \in E|\xi^R \in C(X,p)\}$. F est une partie libre est alors équivalent à $F \subset C_L(F^L,p)\backslash C_R(F^L,p)$.

Lemme 33. *Si $p \xrightarrow{F} q$ (i.e. : p se réduit à q en une étape par suppression de la partie libre F) et q est inévitable, Alors p est aussi inévitable.*

Ce Lemme se géneralisera facilement par itération à des réductions de plusieurs étapes. Et cette partie du théorème se déduira facilement du fait que ϵ est inévitable.

Preuve du Lemme. Nous allons montrer que p est inévitable sur n'importe quel alphabet A par récurrence sur la taille de A. Pour $|A| = 1$, la proposition est évidente. En effet, tout mot $w \in A^*$ vérifiant $|w| \geq |p|$ rencontre p. Donc dans ce cas trivial, p est toujours inévitable.

Supposons maintenant que $A = A' \cup \{a\}$ et que p est inévitable sur A'. Soit $L = A'^+\backslash A'^*p(A'^+)A'^*$ l'ensemble des mots non-vides de A' qui évitent p, qui est fini par hypothèse (En effet, comme p est inévitable sur A', à partir d'un certain rang de longueur, plus aucun mot ne l'évite.), et $M = aA^*\backslash A^*p(A^+)A^*$ l'ensemble des mots sur A qui évitent p et commencent par a.

Chaque mot de M qui n'est pas une puissance de a peut être représenté comme un produit non-vide de mots dans $N = \{a^i w a^j | w \in L, 0 < i < |p|, 0 \leq j < |p|\}$, qui est fini. (On remarquera qu'un produit non-vide de mots dans N n'est pas forcément dans M.) En d'autres termes, si on voit N comme un nouvel alphabet, $M \subset a^+ \cup i(N^+)$, où i est le morphisme du monoïde N^* dans A^*, qui envoie un élément de N (vu comme une lettre) vers lui-même (vue comme un mot). $M = a^+ \cup N^+$.

Soit ξ une nouvelle variable qui n'a pas d'occurence dans p, et $E' = E \cup \{\xi\}$. Alors $q\xi$ est un motif inévitable et tout mot suffisemment long sur N contient une occurence de ce motif $q\xi$. En effet q est inévitable et tout mot suffisemment grand en contient donc une occurence suivie (en allongeant un peu le mot) par une lettre, ou par un facteur.

Par conséquent, pour tout $w \in N^*$ suffisemment long, il existe un morphisme non-effaçant de E'^* dans N^* tel que $f(q\xi)$ est un facteur de w (par définition de l'occurence d'un motif). Pour une variable ξ, $f(\xi) \in N^+$, et de là, $i(f(\xi)) \in aA^+$. On définit maintenant un nouveau morphisme g de E^* dans A^* comme suit :

$$g(\xi) = \begin{cases} \text{si } \xi \in E \backslash (C_L(F^L, p) \cup C_R(F^L, p)) & i(f(\xi)) & (1) \\ \text{si } \xi \in C_R(F^L, p) \backslash C_L(F^L, p) & a^{-1} i(f(\xi)) & (2) \\ \text{si } \xi \in C_L(F^L, p) \backslash (C_R(F^L, p) \cup F) & i(f(\xi)) a & (3) \\ \text{si } \xi \in C_L(F^L, p) \cap C_R(F^L, p) & a^{-1} i(f(\xi)) a & (4) \\ \text{si } \xi \in F & a & (5) \end{cases}$$

Notez que ces 5 cas sont distincts et que cela définit un morphisme non-effaçant. Mieux encore, comme nous allons le voir, $g(p)$ est un facteur de $i(f(q\xi))$. Par conséquent, $i(w)$ rencontre le motif p et ne peut pas être dans M, ce qui signifie que M est fini et que p est inévitable sur A.

Il reste à montrer que $g(p)$ est un facteur de $i(f(q\xi))$. On va montrer par récurrence sur k, pour $1 \leq k \leq |p|$, que si p_k est le préfixe de longueur k de p et $p_k \xrightarrow{F} q_k$, où q_k est un préfixe de q, Alors $rg(p_k)$ est égal à $i(f(q_k))s_k$, où r est a ou ϵ (suivant que la première lettre de p soit dans $C_R(F^L, p)$ ou pas) et s_k est a ou ϵ (suivant que la dernière lettre de p_k soit dans $C_L(F^L, p)$ ou pas). Pour $k = 1$, c'est évident, par définition de g. Supposons que $rg(p_k) = i(f(q_k))s_k$, et soit $p_{k+1} = p_k \eta$. La denière lettre de p_k est dénotée ξ, de façon à ce qu'il y ait une arête de ξ^L à η^R dans $AG(p)$. Nous devons montrer que $rg(p_{k+1}) = i(f(q_{k+1}))s_{k+1}$, avec $s_{k+1} = a$ si $\eta \in C_L(F^L, p)$, $s_{k+1} = \epsilon$ sinon. En écrivant $rg(p_{k+1}) = rg(p_k)g(\eta) = i(f(q_k))s_k g(\eta)$, cela se réduit à $s_k g(\eta) = i(f(\eta))s_{k+1}$ si $\eta \notin F$, ou à $s_k g(\eta) = s_{k+1}$ si $\eta \in F$. C'est encore une fois évident, par définition de g, en observant que $s_k = a$ a lieu si et seulement si $\eta \in C_R(F^L, p)$, car c'est équivalent à $\xi \in C_L(F^L, p)$.

Théorème 34. *Si un motif p est réductible, Alors il est inévitable.*

Preuve. Soit un motif p réductible. On a alors $p \xrightarrow{*} \epsilon$, qui est une suite de réductions à une étape : $p \xrightarrow{F_n} q_n \xrightarrow{F_{n-1}} ... \xrightarrow{F_2} q_2 \xrightarrow{F_1} q_1 \xrightarrow{F_0} \epsilon$. Or ϵ est trivialement inévitable. Donc d'après le lemme précdent, q_1 est aussi inévitable. De même, on applique le lemme itérativement sur q_2 (donc inévitable) puis q_3 puis ... et finalement, p est inévitable.

2.3 Les motifs inévitables sont réductibles

Cette partie de la preuve repose sur de multiples lemmes (qu'on admettera pour passer rapidement à la partie suivante) :

Lemme 35. *Supposons que $f(q)$ est un facteur de p pour un certain morphisme non-effaçant f de E^* (de façon que q divise p), et que F est une partie libre de p. Soit F' l'ensemble de variables ξ telles que $f(\xi) \in F^+$. Alors F' est une partie libre de q. Mieux, si $p \xrightarrow{F} p'$ et si $q \xrightarrow{F'} q'$, Alors $f'(q')$ est un facteur de p', où $f' = \delta_F \circ f|_{E \backslash F'}$ est le morphisme non-effaçant de $(E \backslash F')^*$ vers$(E \backslash F)^*$, envoyant une variable ξ vers le mottif obtenu en enlevant les éléments de F de $f(\xi)$.*

Lemme 36. *Supposons que p, p', q' sont des motifs tels que $p \xrightarrow{*} p'$ et $f(q)$ est un facteur de p pour un certain morphisme non-effaçant f. Alors il existe un motif q' et un morphisme non-effaçant f' tel que $q \xrightarrow{*} q'$ et $f'(q')$ est un facteur de p', avec la condition supplémentaire que $f(alphabet(q) \backslash alphabet(q')) \subset (alphabet(q) \backslash alphabet(q''))^*$ (Si une variable ξ est supprimée de q, alors $f(\xi)$ contient uniquement des variables supprimées de p).*

Preuve. La preuve repose sur une itération du Lemme 35.

Lemme 37. *Soit $q = \delta_V(p)$ un motif obtenu d'un autre motif p en enlevant les variables dans un ensemble quelconque V. Supposons qu'il existe un motif r et un morphisme non-effaçant f tel que $r \xrightarrow{*} q$ et $f(p)$ est un facteur de r, et que $\xi \in V$ si et seulement si $(alphabet(r) \backslash alphabet(q))^*$. Alors $p \xrightarrow{*} q$.*

Preuve. La preuve repose sur une application du Lemme 36.

Lemme 38. *Soit v un facteur de longueur au moins 2 de $w^{(k)}$. Alors il existe un entier i, $0 \leq i \leq 4k-1$, et une lettre $x \in A_k$ telle que, chaque fois que v a une occurence à la position $n \geq 0$ dans $w^{(k)}$, on a :*
(i) $n = i \bmod 4k$
(ii) la lettre en position $n' = \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor$ dans $w^{(k)}$ est $w^{(k)}_{n'} = x$

Lemme 39. *Soit p un motif, k un entier tel que $2k > |alphabet(p)|$, et v un facteur de $w^{(k)}$ tel que $\varphi_k(v)$ rencontre p. Alors il existe un motif q tel que $p \xrightarrow{*} q$ et v rencontre q.*

Preuve. La preuve repose entre autres sur les deux Lemmes précédents (37 et 38).

Lemme 40. *Si le mot infini $w^{(k)}$ rencontre un motif p de moins de $2k$ variables distinctes, alors p est réductible.*

Preuve. La preuve repose sur une application du Lemme précédent (39).

Preuve du théorème 21. En vertue du Théorème 34, si p est réductible, alors p est inévitable. Alors pour tout k, et en particulier pour $k = \lceil \frac{|alphabet(p)|+1}{2} \rceil$, $w^{(k)}$ rencontre p. En vertue du Lemme 40, p est réductible.

Corollaire 41. *Le mot infini $w^{(k)}$ évite tout les motifs évitables d'au plus $2k-1$ variables.*

Corollaire 42. *Si tout les variables de p ont au moins 2 occurences dans p, Alors p est évitable.*

Corollaire 43. *Soit p un motif à n variables. Si $|p| \geq 2^n$, Alors p est évitable.*

3 Le cas des motifs binaires

Définition 44. L'*indice d'évitabilité* $\mu(p)$ d'un motif $p \in E^*$ est le plus petit entier k tel que p soit k-évitable, ou ∞ si p est inévitable. Par exemple, α^2 est 2-inévitable mais 3-évitable. Donc $\mu(\alpha^2) = 3$. Clairement, on a : $2 \leq \mu(p) \leq \infty$ et d'une autre part, si $p|q$ alors $\mu(p) \geq \mu(q)$.

Remarque 45. Contrairement au cas de l'algorithme de Zimin, où la taille de l'alphabet n'avait pas d'importance, il n'existe pas d'algorithme connu pour déterminer l'indice dévitabilité d'un motif. Par exemple, à l'heure actuelle, on ne sait pas si $\mu(\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma)$ vaut 2 ou 3. Restreignons nous donc au cas des motifs binaires. i.e. :$E = \{\alpha, \beta\}$

Remarque 46. Le cas unaire a déjà été traité plus haut. On a : $\mu(\epsilon) = \mu(\alpha) = \infty$, $\mu(\alpha\alpha) = 3$ et pour $k \geq 3$, $\mu(alpha^k) = 2$.

Le fait que $\alpha\alpha$ soit 3-évitable et 2-inévitable nous donne déjà beaucoup d'informations sur les motifs binaires. Seul un nombre fini de motifs sont 3-inévitables. En effet, un motif divisible par $\alpha\alpha$ doit être 3-évitable, et comme $\alpha\alpha$ est 2-inévitable, il n'y a qu'un nombre fini de motifs qui ne sont pas divisibles par $\alpha\alpha$, à savoir ϵ, α, β, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, $\alpha\beta\alpha$, et $\beta\alpha\beta$. En fait, ils sont tous inévitables, ce qui implique que l'indice dévitabilité d'un motif binaire ne peut être que 2, 3, où ∞.

3.1 Motifs binaires d'indice 3

Lemme 47. *Les motifs binaires $\alpha\alpha$, $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\alpha\beta\alpha$, $\alpha\beta\beta\alpha$, $\alpha\alpha\beta\beta$, $\alpha\beta\alpha\beta$, $\alpha\alpha\beta\alpha\alpha$ et $\alpha\alpha\beta\alpha\beta$ sont d'indice d'évitabilité 3.*

Preuve. Comme tout ces motifs sont divisibles par $\alpha\alpha$, ils sont 3-évitables. Un simple algorithme est suffisant pour montrer qu'ils sont 2-inévitables. Les résultats des algorithmes sont résumés dans le tableau suivant, où w est un exemple de mot binaire évitant p et de longueur maximale, et N est le nombre total de mots évitant p, en incluant le mot vide et les mots unaires.

p	w	$\|w\|$	N
$\alpha\alpha$	aba	3	7
$\alpha\alpha\beta$	$abab$	4	13
$\alpha\alpha\beta\alpha$	$ababbaaa$	9	91
$\alpha\beta\beta\alpha$	$aabbbaaabb$	10	93
$\alpha\alpha\beta\beta$	$abaaabaaaba$	11	147
$\alpha\beta\alpha\beta$	$abaabbaaabbbaabbab$	18	477
$\alpha\alpha\beta\alpha\alpha$	$abaaaabbbbabababab$	18	1699
$\alpha\alpha\beta\alpha\beta$	$abababababbaaabbbaaaabbbbaaabbbaabbab$	38	26241

3.2 Motifs binaires d'indice 2

Lemme 48. *Les motifs binaires $\alpha\alpha\alpha$, $\alpha\beta\alpha\beta\alpha$, $\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha$, $\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta$, $\alpha\beta\alpha\alpha\beta$, et $\alpha\alpha\beta\beta\alpha$ ont un indice d'évitabilité d'index 2.*

Preuve. Les motifs $\alpha\alpha\alpha$ et $\alpha\beta\alpha$ sont évités par le mot infini de Thue-Morse, et par conséquent 2-évitables.

Les deux motifs $\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha$ et $\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta$ sont évités par le mot infini $u = \nu^\omega(a)$, où ν est le morphisme uniforme $a \mapsto aab$, $b \mapsto bba$.

Le motif $\alpha\beta\alpha\alpha\beta$ est évité par le mot infini $v = \psi(\mu^\omega(a))$, où μ est le morphisme ternaire défini par $a \mapsto abc$, $b \mapsto ac$ et $c \mapsto b$, et ψ par $a \mapsto aaa$, $b \mapsto bbb$ et $c \mapsto ababab$.

Le motif $\alpha\alpha\beta\beta\alpha$ est évité par le mot infini $v = \chi(\mu^\omega(a))$, où μ est définie comme précédemment et χ par $a \mapsto aa$, $b \mapsto aba$ et $c \mapsto abbb$.

3.3 Classification des motifs binaires par indice dévitabilité

Théorème 49. *Il existe trois catégories de motifs binaires :*
- *Les 7 motifs binaires ϵ, α, $\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha$, et transposés $\alpha \leftrightarrow \beta$ sont inévitables.*
- *Les 22 motifs binaires $\alpha\alpha$, $\alpha\alpha\beta$, $\alpha\alpha\beta\alpha$, $\alpha\beta\beta\alpha$, $\alpha\alpha\beta\beta$, $\alpha\beta\alpha\beta$, $\alpha\alpha\beta\alpha\alpha$, $\alpha\alpha\beta\alpha\beta$, et transposés $\alpha \leftrightarrow \beta$ sont d'indice dévitabilité 3.*
- *Tout les autres motifs binaires, et en particulier tout les motifs binaires de longueur au moins 6, ont un indice d'évitabilité 2.*

Preuve. Tout les motifs binaires de longueur au moins 6 sont divisibles par un motif binaire déjà mentionné dans le lemme 2 (ou par son mirroir). Par conséquent, ils sont à fortiori 2-évitables, et d'indice 2. De même pour tout les motifs encore plus grands. Le travail concernant les 29 autres motifs a déjà été fait dans les lemmes.

– Motifs binaires inévitable en pointillés ;
– Motifs binaires d'indice 3 avec tirés ;
– Motifs binaires d'indice 2 avec cercles gras.