Automates sur les mots transfinis

Guillaume Claret

29 janvier 2009

1. Présentation
   - Objectifs
   - Mots de longueur infinie
   - Expressions rationnelles transfinies
   - Automates transfinis
2. Équivalence avec les expressions rationnelles
   - Des expressions vers les automates
   - Des automates vers les expressions rationnelles

Objectifs

- introduire des mots de longueur infinie
- étendre de manière naturelle la notion de d’expression régulière pour étendre leurs domaines d’application

Définitions

Mot

Un mot tranfini sur un alphabet Σ est une application $u : \alpha \longrightarrow \Sigma$ pour un $\alpha \in Ord$.

Sous-mot

Pour $\beta \leq \gamma \leq \alpha$, le sous-mot $u_{\beta\gamma}$ est la fonction $\delta \longmapsto (\beta + \delta)$ définie sur $\gamma - \delta$.

Opérations

Concaténation

Le mot uv est :

$$
\begin{aligned}
uv : \quad |u| + |v| &\longrightarrow \Sigma \\
\alpha &\longmapsto \begin{cases} u(\alpha) & \text{si } \alpha < |u| \\ v(\alpha - |v|) & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Opérations

Exponentiation

$$A^\alpha = \{u \mid \exists\ (\beta_\gamma)_{\gamma<\alpha} \text{ suite propre dans } |u|+1$$
$$\text{avec } \beta_0 = 0, \beta_\alpha = |u|, \forall\gamma < \alpha, v_{\beta_\gamma\beta_{\gamma+1}} \in A\}$$

une suite propre d'ordinaux étant une suite croissante telle que pour γ ordinal limite, $\beta_\gamma = \sup\limits_{\gamma'<\gamma} \beta_{\gamma'}$.

Opérations supplémentaires

On note enfin $A^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} A^n$ et $A^\# = \bigcup\limits_{\alpha\in Ord} A^\alpha$.

Exemple

- Pour $u = b^3 a^\omega (ac)^{\omega^2} b$:
  - $|u| = \omega^2 + 1$
  - $u_{\omega,\omega 2} = (ac)^\omega$
- l'ensembles des mots ayant un nombre fini de a est :

$$L = \Sigma^*(\Sigma - \{a\})^\#$$

Définition

Expression rationnelle

On définit inductivement une expression rationnelle transfinie par :

- $\varnothing$, ϵ, $a \in \Sigma$
- $e_1 + e_2$, $e_1 \cdot e_2$, e^*, e^ω, $e^\#$
  avec e_1, e_2 et e expressions rationnelles

Le langage reconnu associé est alors notée $L(e)$ et suit la définition usuelle.

Exemple

On reprend le langage L précédent :

$$L = \Sigma^*(\Sigma - \{a\})^\#$$

Alors, avec $\Sigma = \{a, b\}$, on a $L = L((a + b)^* b^\#)$.

Définition

On note, pour un ensemble E, $\mathcal{P}_s(E) = \mathcal{P}(E) \cup E$. Alors un automate transfini A est un quintuplet $(\Sigma, Q, I, F, \Delta)$ avec :

- Σ l'alphabet, Q l'ensemble des états
- $I \in \mathcal{P}_s(Q)$, $F \subset \mathcal{P}_s(Q)$
- $\Delta \subset \mathcal{P}_s(Q) \times \Sigma \times Q$

Calcul

L'objectif va alors être d'étendre la notion de calcul à des mots de longueur infinie, en distinguant deux types de longueur de sous-mots :

- si ordinal successeur :
  de même que d'ordinaire : si on peut calculer u en arrivant sur $q \in Q$, alors pour $(q, a, q') \in \Delta$ on peut calculer ua en arrivant sur q'
- si ordinal limite :
  on fait appel au concept de cofinalité, appliqué à tous les états précédemment atteints, et on utilise un nouveau type de transition, qui part d'un ensemble d'états

Définitions

Calcul

Un calcul sur $u \in \Sigma^{\#}$ est une fonction $H : |u| + 1 \longrightarrow \mathcal{P}_s(Q)$ continue, ie telle que, si α successeur, $H(\alpha) \in Q$, si α limite :

$$H(\alpha) = \{q \in Q \mid \{\beta < \alpha \mid H(\beta) = q\} \text{ cofinal à } \beta\}$$

et vérifiant :

$$\forall \alpha < |u|, (H(\alpha), u(\alpha), H(\alpha + 1)) \in \Delta$$

Mots reconnus

Un mot est alors dit reconnu par A si il existe un calcul acceptant H avec $H(0) = I$ et $H(|u|) \in F$.

On notera $L(A)$ le langage des mots reconnaissables.

Exemple

En reprenant toujours :

$$L = \Sigma^*(\Sigma - \{a\})^\#$$

un automate A associé peut par exemple être :

avec la transition supplémentaire $\{2\} \xrightarrow{b} 2$ et :

$$\begin{cases} I & = 1 \\ F & = \{1, 2, \{2\}\} \end{cases}$$

Équivalence

Soit $u \in L$; alors $\exists v \in \Sigma^*, w \in b^{\#}, u = vw$. Soit le calcul suivant :

$$
\begin{array}{rccl}
H: & |u|+1 & \longrightarrow & Q \\
 & \alpha & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq |v| \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}
\end{array}
$$

On vérifie que H est bien un calcul valide sur u ; c'est de plus un calcul acceptant car $H(0) = I$ et $H(|u|) \in F$ selon que $w = \epsilon$, $|w|$ successeur ou $|w|$ limite.

Équivalence

Réciproquement :
Tout calcul H acceptant un mot u est croissant sur les états (sans compter les images d'ordinaux limites), et l'état 1 ne peut être atteint une infinité de fois, car sinon $H(\omega) = \{1\}$ qui n'est état de départ d'aucune transition et non final.
En notant n le dernier entier tel que $H(n) = 1$ (valant $|u|$ si H constante à 1), on en déduit $u_{0,n} \in \Sigma^*$ et $u_{n,|u|} \in b^{\#}$ car on peut lire une lettre quelconque en restant dans 1, puis seuls des b peuvent être lus en allant dans 2.

Équivalence avec les expressions rationnelles

Comme dans le cas fini, ces deux types de représentation d'un langage sont en fait équivalentes.
Il existe de plus un moyen constructif de passer d'une forme à l'autre, ce qui permet d'obtenir par là même certain résultats de décidabilité, comme décider si un langage transfini est vide.

Résultat

Théorème

Pour toute expression rationnelle e transfinie on peut construire un automate A tel que :

$$L(e) = L(A)$$

Nous ne montrerons pas cette partie, qui est traitée par exemple dans [**?**].

Résultat

Théorème

Réciproquement, étant donné un automate A, on peut construire une expression rationnelle e vérifiant :

$$L(A) = L(e)$$

C'est la partie la plus intéressante. Nous allons raisonner par récurrence en appliquant une variante de la démonstration standard du théorème de Kleene, où l'on associe une expression rationnelle aux langages des mots permettant d'accéder à j à partir de i en ne passant que par des états d'indice inférieur à k.

Pour cela, étant donné $A = (\Sigma, Q, I, F, \Delta)$ avec $Q = \{q_1, \cdots q_n\}$, on définit, pour $Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}_s(Q)$ et $Z_2 \in \mathcal{P}(Q)$, $C(Z_1, Z_2, Z_3)$ le langage des mots qui possèdent un calcul allant de l'état Z_1 à Z_3 en ne passant que par des états de $\mathcal{P}_s(Z_2)$, et $CC(Z_1, Z_2, Z_3)$ de même mais en s'interdisant de passer par Z_2. Nous noterons $E(Z_1, Z_2, Z_3)$ et $EE(Z_1, Z_2, Z_3)$ les expressions rationnelles associées.

Par récurrence sur k le cardinal de Z_2 :

- Si k = 0 :

  $$E(Z_1, \varnothing, Z_3) = EE(Z_1, \varnothing, Z_3) = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid (Z_1, a, Z_3) \in \Delta\} \cup \{\epsilon\} \\ \{a \in \Sigma \mid (Z_1, a, Z_3) \in \Delta\} \end{cases}$$

  convient.
- Pour $k \geq 1$ $(Z_2 = \{q_1, \ldots, q_k\})$: on va traiter trois cas différents :
  - $EE(Z_1, Z_2, Z_3)$ avec $Z_2 \neq Z_3$:
    Soient :

    $$E_{boucle} = E(q_1, Z_2 - \{q_2\}, q_2) \cdots E(q_{k-1}, Z_2 - \{q_k\}, q_k) \cdot E(q_k, Z_2 - \{q_1\}$$