Théorème de Cardinalité

Pierre Gaillard

Langage Formel, Calculabilité, Complexité

29 Janvier 2009

Sommaire

1. Présentation du Théorème
   - Premières définitions
   - La conjecture de Beigel
   - Le théorème de Cardinalité

2. Preuve du Théorème
   - Réduction du problème à un arbre
   - La condition fondamentale
   - Notre arbre vérifie cette condition

Oracles et ensembles récursifs

Définition

Une *machine à oracle* est une machine classique dans laquelle on peut dès que l'on souhaite interroger un oracle pour savoir dans quel état continuer.

Définition

Un ensemble A est dit *récursif* si sa fonction caractéristique, notée χ_A est récursive, c'est à dire calculable par une machine de Turing.

L'enjeu

Les oracles permettent :

1. d'avancer beaucoup plus vite dans les calculs ;
2. de reconnaître des langages indécidables.

On s'intéresse ici à savoir si un ensemble est récursif selon le nombre de requêtes à un oracle.

La conjecture de Beigel

Théorème (Non-Speedup, 1986)

Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$. Si la fonction de 2^n variables $(\chi_A(x_1), ..., \chi_A(x_{2^n}))$ peut-être calculée par un algorithme qui fait au plus n appels à l'oracle B, alors A est récursif.

Pour $A \subset \mathbb{N}$ et $n \geq 1$, on définit la fonction suivante :

$$\forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{N} \qquad \#_n^A(x_1, ..., x_n) = \#\{i, x_i \in A\} = \sum_{i=1}^{n} \chi_A(x_i)$$

Conjecture (Beigel)

Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$ et $n \geq 1$. Si $\#_{2^n}^A$ peut être calculée par un algorithme faisant au plus n appels à l'oracle B alors A est récursif.

Énoncé du théorème

Notons W_i pour $i \in \mathbb{N}$ le i^{eme} ensemble récursivement énumérable.

Théorème (de Cardinalité)

Soient $A \subset \mathbb{N}$ et $m \geq 1$. Supposons qu'il existe une fonction calculable $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{N}^m$ deux à deux distincts, on ait :

1. $W_{g(x_1,...,x_m)} \subset \{0, ..., m\}$ *(L'inclusion est propre)*
2. $\#_m^A (x_1, ..., x_m) \in W_{g(x_1,...,x_m)}$

Alors A est récursif.

Lien avec la conjecture

Le lemme suivant permet d'obtenir la conjecture de Beigel à partir du théorème.

Lemme

Si une fonction $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ peut être calculée avec n appels à un oracle B alors il existe un ensemble S d'au plus 2^n fonctions calculables telles que :

$$\forall x \in \Sigma^* \quad \exists h \in S \qquad h(x) = f(x)$$

Arbre

Définition

Un *arbre* est une partie de $\{0,1\}^*$ qui est close par préfixe.

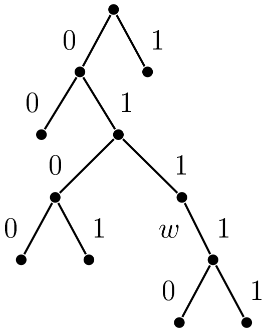

FIGURE: Arbre $T = \{0, 00, 01, 010, 0100, 0101, 011, 0111, 01110, 01111, 1\}$. Le noeud $w = 0111 \in T$ est tel que $w(0) = 0$ et $w(2) = 1$

L'arbre intéressant

$$T_g = \left\{ t \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \forall 0 \leq x_1 < \ldots < x_m < |t| \quad \sum_{i=1}^{m} t(x_i) \in W_{g(x_1,\ldots,x_m)} \right\}$$

1. C'est bien un arbre binaire
2. $\sum_{i=1}^{m} \chi_A(x_i) = \#_m^A(x_1,\ldots,x_m) \in W_{g(x_1,\ldots,x_m)}$
   Donc χ_A est une branche de T_g !

Idée de la preuve

Les branches d'un arbre peuvent être vues comme des parties de $\mathbb{N}$.

On voudrait montrer que χ_A est récursive, pour cela on va montrer que toutes les branches de T le sont.
La preuve reposera en deux étapes :

1. Sous quelles conditions toutes les branches d'un arbre sont-elles récursives ?
2. T_g vérifie-t-il ces conditions ?

Plongement et rang

Notons B_n l'arbre binaire complet de hauteur n.

Définition

Soit T un arbre. On dit que $f : B_n \to T$ est un *plongement* de B_n dans T si et seulement si

$$\forall s \in \{0,1\}^{n-1} \qquad f(s) \cdot 0 \sqsubseteq f(s \cdot 0) \qquad \& \qquad f(s) \cdot 1 \sqsubseteq f(s \cdot 1)$$

Le *rang* d'un arbre T est : $rg(T) = sup\{n \geq 0,\ B_n \text{ se plonge dans } T\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Illustration des définitions

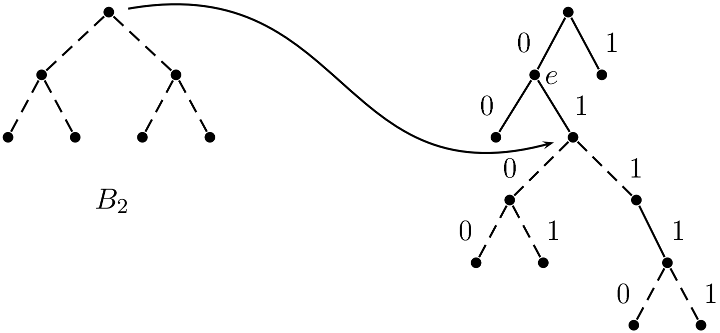

FIGURE: Exemple de plongement d'un arbre binaire B_2 dans un arbre T sous un noeud e, $rg\,(T) = 2$.

La condition fondamentale

Lemme

Si T est un arbre récursivement énumérable de rang fini alors chacune de ses branches est récursive.

T_g vérifie cette condition

Lemme

Pour tout arbre B_{2k} bicolore, il existe un plongement g de B_k dans B_{2k} tel que tous les noeuds de $g(B_k)$ soient de la même couleur.

Lemme

Pour tout $n \geq 1$ et tout arbre T tel que $B_{k(n)}$ se plonge dans T, il existe $t_1, ..., t_n, \quad n+1$ noeuds de T, des entiers $x_1 < ... < x_n$ et $b \in \{0, 1\}$ tels que :

$$\forall i = 1, ..., n \quad \forall j = 1, ..., n+1 \qquad t_j(x_i) = \begin{cases} 1-b & si\ i < j \\ b & si\ i \geq j \end{cases}$$

En particulier, $\{\sum_{i=1}^{n} t_j(x_i) | 1 \leq j \leq n+1\} = \{0, 1, ..., n\}$.

Illustration du deuxième lemme

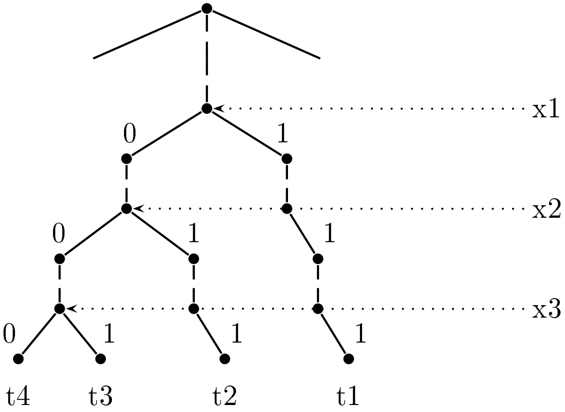

FIGURE: Illustration du lemme 2 avec $b = 1$. On remarque qu'on a bien $\left\{\sum_{i=1}^{3} t_j\left(x_i\right) | j = 1, .., 4\right\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Fin de la preuve

T_g est de rang fini. En effet, si on suppose son rang infini :

1. Lemme :
   $\exists t_1, ..., t_{m+1} \in T_g \quad \exists x_1, ..., x_m \quad : \quad \sum_{i=1}^{m} t_j(x_i) = \{0, 1, ..., m\}$
2. Définition de T_g : $\{0, 1, ..., m\} \subseteq W_{g(x_1, ..., x_m)}$
3. Hypothèse du théorème : contradiction.

Finalement, toutes les branches de T_g sont récursives, en particulier χ_A