Théorème de Cobham

Titus Lupu

ENS

Paris 2009

1. Les ensembles rationnels. Enoncé du théorème de Cobham.
2. La quasi-périodicité des ensembles rationnels
3. Eléments de preuve du théorème de Cobham

Définition des ensembles rationels

Définition

- *Si k entier ≥ 2, un ensemble X d'entiers est dit* ***k-rationnel*** *si en représentant les entiers en base k, il est reconnaissable par automate.*
- *Un ensemble X d'entiers est dit* ***rationnel*** *si en codant les entiers sur un alphabet unaire par la longueur des mots, il est reconnaissable par automate.*

Exemple

- $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est 2-rationnel.
- L'ensembles des entiers pairs est rationnel.

Stabilité par transformation affine et transformation affine réciproque

Proposition

Soient $m, p \geq 0$ *et* $k \geq 2$ *des entiers.*

- *Si* $X \subseteq \mathbb{N}$ *est* k*-rationnel, alors* $Y = \{m + rp \mid r \in X\}$ *est* k*-rationnel.*
- *Si* $Y \subseteq \mathbb{N}$ *est* k*-rationnel, alors* $X = \{r \geq 0 \mid m + rp \in Y\}$ *est* k*-rationnel.*

Caractérisations des ensembles rationnels

Définition

- *X ensemble d'entiers. On appelle* ***mot caractéristique*** *de X le mot infini $w = w_1 w_2 ... w_n ...$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$ tel que $w_n = 1$ si et seulement si $n \in X$.*
- *Un mot infini w est dit* ***ultimement périodique*** *s'il est périodique à partir d'un certain rang. Un ensemble X d'entiers est dit* ***ultimement périodique*** *si son mot caractéristique l'est.*
- *Un facteur d'un mot infini w est dit* ***récurrent*** *s'il apparaît pour un infinité d'indices dans l'écriture de w.*

Exemple

L'ensemble des entiers pairs ≥ 4 à pour mot caractéristique 000010101010... qui est ultimement périodique. 01 en est un facteur récurrent.

Caractérisations des ensembles rationnels(2)

Proposition

Un ensemble X d'entiers est rationnel si et seulement s'il est ultimement périodique.

Proposition

Soit w un mot infini et $\mathcal{N}(m)$ pour $m \geq 1$ le nombre de facteurs récurrents de w de longueur m. w est ultimement périodique si et seulement s'il existe $m \geq 1$ tel que $\mathcal{N}(m) \leq m$.

Incidence du changement de base sur la reconnaissabilité

Définition

Deux entiers k *et* $l \geq 2$ *sont dis* ***multiplicativement indépendants*** *s'il n'existe pas d'entiers* p *et* $q \geq 1$ *tel que* $k^p = l^q$.

Remarque

Si k et l sont mutltiplicativement indépendants, alors l'ensemble des $\frac{k^p}{l^q}$ où $p, q \in \mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}^+$ car $\frac{log(k)}{log(l)}$ est irrationnel.

On dispose des résultats suivants :

- Un ensemble rationnel est k-rationnel pour tout $k \geq 2$.
- Si k et l sont mutltiplicativement dépendants, alors les ensembles k-rationnels et l-rationnels sont les mêmes.
- (Théorème de Cobham) Si k et l sont mutltiplicativement indépendants, alors un ensemble à la fois k et l-rationnel est rationnel.

Ensembles quasi-périodiques et lemme fondamental

Définition

*Un ensemble X d'entiers est dit d-**quasi-périodique** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[n, n+d[\cap X \neq \varnothing$, et **quasi-périodique** s'il est d-quasi-périodique pour un certain d.*

Exemple

- Un ensemble périodique ou ultimement périodique est quasi-périodique.
- $\{\lfloor k\pi \rfloor | k \in \mathbb{N}\}$ est 4-quasi-périodique sans être ultimement périodique.

Théorème

Soit k et l des entiers ≥ 2 multiplicativement indépendants et X un ensemble infini à la fois k et l-rationnel. Alors X est quasi-périodique.

Théorème

Si k et l sont mutltiplicativement indépendants, alors un ensemble à la fois k et l-rationnel est rationnel.