Théorème de Cobham

Titus Lupu

19 décembre 2008

1 Introduction

On s'intéresse aux ensembles d'entiers reconnaissables par automate. On dispose des résultats suivants (voir [1]) : Si un ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ est reconnaissable en représentant un entier n par le mot de longueur n sur l'alphabet $\{0\}$ (on dit alors que X est *rationnel*), alors pour tout entier $k \geq 2$, X est reconnaissable en codant les entiers en base k (on dit alors que X est *k-rationnel*). Deux entiers k et l sont dits *multiplicativement dépendants* s'il existe p et q entiers tel que $k^p = l^q$. Si k et l sont multiplicativement dépendants, alors les ensmbles k-rationnels et l-rationnels sont les mêmes. Le théorème de Cobham affirme que si à l'inverse k et l sont *multiplicativement indépendants*, les ensemles à la fois k et l-rationnels sont exactement les ensembles rationnels. Le but de cet exposé est de présenter une démonstration de ce résultat.

2 Premières propriétés

Tout au long de ce document on utilisera les notations suivantes : Soit un entier $k \geq 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $(n)_k$ la représentaton en base k de n. Pour $X \subseteq \mathbb{N}$, on note $(X)_k := \{(n)_k \mid n \in X\}$. Si w est un mot non vide sur l'alphabet $[|0, k-1|]$ ne commençant pas par 0, on note $[w]_k$ l'entier dont w est l'ecriture ne base k.

Pour un mot $w = w_1 w_2 ... w_n ...$, éventuellement infini, on note $w[a, b]$ le facteur $w_a ... w_{b-1}$ de w.

Proposition 1. *Soient $m, p \geq 0$ et $k \geq 2$ des entiers. Si $X \subseteq \mathbb{N}$ est k-rationnel, alors $Y = \{m + rp \mid r \in X\}$ est k-rationnel. Si $Y \subseteq \mathbb{N}$ est k-rationnel, alors $X = \{r \geq 0 \mid m + rp \in Y\}$ est k-rationnel.*

Démonstration. Lorsqu'n dit qu'un ensemble $X \in \mathbb{N}$ est k-rationnel on suppose qu'il existe un automate qui reconnaît $(X)_k$ en lisant les écritures en base k de gauche à droite. Mais dans ce cas, l'automate mirroir reconnaît $(X)_k$ en lisant les écritures en base k dans le sens inverse. Donc les sens de lecture n'a pas d'incidence sur la reconnaissabilité.

En fixant en entier m on peut réaliser un automate qui calcule $(r+m)_k$ en lisant $(r)_k$ de droite à gauche, en appliquant le même algorithme qu'on utilise pour faire l'addition à la main. La retenue qu'on aura besoin de propager peut prendre au plus 2 valeurs. Ensuite on peut branche à la sortie de cette automate un automate de reconnaissance par lecture de droite à gauche. De même pour la soustraction de m et la multiplication par p (la retenu peut prendre alors au plus k valeurs). Pour la division euclidienne par p, on utilise la lecture de gauche à droite. En combinant ces opérations arithmétiques, on obtient le résultat. □

Définition 2. Soit $X \subseteq \mathbb{N}$. On appelle *mot caractéristique* de X le mot infini $w = w_1 w_2 ... w_n ...$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$ tel que $w_n = 1$ si et seulement si $n \in X$.

Définition 3. On dit qu'un mot infini $w = w_1 w_2 ... w_n ...$ est *ultimement périodique* s'il existe $N \geq 0$ et $p \geq 1$ entiers tel que pour tout $n \geq N, w_n = w_{n+p}$. p est alors appelé une période du mot w. Un esnseble $X \subseteq \mathbb{N}$ est dit ultimement périodique si son mot caractéristique l'est.

Exemple 4. Si X est l'ensembles des entiers pairs, le mot caractéristique de X est 101010..., et il est ultimement périodique.

Proposition 5. *Un ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ est rationnel si et seulement s'il est ultimement périodique.*

Démonstration. Le sens ultimement périodique implique rationnel est clair.

Réciproquement, les ensembles rationnels sont ceux qui admettent une expression rationnelle sur l'alphabet $\{0\}$. Montrons par induction structurelle sur une expression rationnelle $\mathcal{R}$: l'ensemble codé par $\mathcal{R}$ est ultimement périodique.

Si $\mathcal{R} = \emptyset, \varepsilon$ ou 0, l'ensemble codé par $\mathcal{R}$ est respectivement $\emptyset$, $\{0\}$ ou $\{1\}$.

Si X_1, $X_2 \subseteq \mathbb{N}$ sont codés respectivement par les expressions rationnelles $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$, soit $X \subseteq \mathbb{N}$ codé par $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ et $X' \subseteq \mathbb{N}$ codé par $\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$. Considérons $N_1, N_2 \geq 0$ et $p_1, p_2 \geq 1$ tel que X_1 p_1-périodique à partir du rang N_1 et X_2 p_2-périodique à partir du rang N_2. Alors $X = \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in X_1, n_2 \in X_2\}$ est $ppcm(p_1, p_2)$-périodique à partir du rang $N_1 + N_2 + ppcm(p_1, p_2)$. $X' = X_1 \cup X_2$ est $ppcm(p_1, p_2)$-périodique à partir du rang $max(N_1, N_2)$.

Si $X \subseteq \mathbb{N}$ est codé par l'expression rationnelle $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{M}$ codé par $\mathcal{R}^*$ est le sous-monoïde de $\mathbb{N}$ engendré par X. Soit d le $pgcd$ des éléments de X. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M} \cap [N, +\infty[= d\mathbb{N} \cap [N, +\infty[$. En effet, soient $a_1 < a_2 < ... < a_n \in X$ tel que $d = pgcd(a_1, a_2, ..., a_n)$. Soit $\mathcal{M}'$ les sous-monoïde engendré par $(a_1, a_2, ..., a_n)$. On peut écrire n relations de Bezout :

$$d = -u_{1,1}a_1 + u_{1,2}a_2 + ... + u_{1,n}a_n = u_{2,1}a_1 - u_{2,2}a_2 + ... + u_{2,n}a_n = ...$$

$$= u_{n,1}a_1 + u_{n,2}a_2 + ... - u_{n,n}a_n$$

où les $u_{i,j}$ sont des entiers positifs. En posant $N = u_{1,1}a_1 + u_{2,2}a_2 + ... + u_{n,n}a_n$, on a $\mathcal{M}' \cap [N, +\infty[= d\mathbb{N} \cap [N, +\infty[$. Comme $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M} \subseteq d\mathbb{N}$, on a le résultat voulu. Donc $\mathcal{M}$ est ultimement périodique.

□

Définition 6. Soit w un mot infini. Un *facteur récurrent* de w est un facteur de w qui apparaît pour une infinité d'indices dans l'écriture de w.

Exemple 7. 010 est un facteur récurrent du mot 101010....

Proposition 8. *Soit w un mot infini et $\mathcal{N}(m)$ pour $m \geq 1$ le nombre de facteurs récurrents de w de longueur m. w est ultimement périodique si et seulement s'il existe $m \geq 1$ tel que $\mathcal{N}(m) \leq m$.*

Démonstration. Dans un sens, si w est p-périodique à partir d'un certain rang, $\mathcal{N}(p) = p$. Réciproquement, on remarque que pour tout $m \geq 1$, $\mathcal{N}(m) \leq \mathcal{N}(M+1)$: Soit u un facteur récurrent de w de longueur m. Comme la lettre succédant à u dans w ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, une de ces valeurs apparaît une infinité de fois, et u se prolonge en en facteur récurrent de longueur $m+1$. Considérons alors $m \geq 1$ minimal tel que $\mathcal{N}(m) \leq m$. Si $m = 1$, à partir d'un certain rang, w est toujours composé d'une même lettre. Sinon, $\mathcal{N}(m-1) > m-1$, et par croissance de $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}(m-1) = \mathcal{N}(m) = m$: il existe une unique manière de prolonger un facteur récurrent de longueur $m-1$ en un facteur récurrent de longueur m. A partir de l'indice N où les seuls facteurs de longueur m qui apparaissent dans w sont les facteurs récurrents, la lettre succédant à un facteur de longueur $m-1$ ne depend plus de le position de celui-ci. Soit alors u un facteur récurrent de longueur $m-1$ et $n_2 > n_1 \geq N$ deux indices de début de u. $n_2 - n_1$ est alors une période de w. $\square$

3 Ensembles quasi-périodiques

Définition 9. Un ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ est dit *d-quasi-périodique* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[n, n+d[\cap X \neq \emptyset$, et *quasi-périodique* s'il est d-quasi-périodique pour un cerain d.

On établit dans ce qui suit un résultat essentiel pour la démonstration du théorème de Cobham proposée.

Théorème 10. *Si k et $l \geq 2$ sont multiplicativement indépendants, alors un ensemble infini à la fois k et l-rationnel est quasi-périodique. (voir [3])*

Démonstration. On commence par donner quelques lemmes intemédiaires :

Lemme 11. *Si k et $l \geq 2$ sont multiplicativement indépendants, alors l'ensemble des $\dfrac{k^p}{l^q}$ où $p, q \in \mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Q}^+$.*

Démonstration. Cela revient à montrer que $\{p\ log(k) - q\ log(l) \mid p, q \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Comme k et l sont multiplicativement indépendants, $\dfrac{log(k)}{log(l)}$ est irrationnel et $log(k)\mathbb{Z} + log(l)\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $\eta = min(log(p), log(q))$ et

$$\mathcal{E} = \{p\ log(k) - q\ log(l) \mid p, q \in \mathbb{N}\} \cap [-\eta, \eta].$$

On a

$$log(k)\mathbb{Z} + log(l)\mathbb{Z} \cap [-\eta, \eta] = \mathcal{E} \cup -\mathcal{E}.$$

Donc $\overline{\mathcal{E} \cup -\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{E}} \cup \overline{-\mathcal{E}} = [-\eta, \eta]$. D'où l'adhérence de $\{p\ log(k) - q\ log(l) \mid p, q \in \mathbb{N}\}$ est d'intérieur non vide. En utilisant la stabilité par dilatation de rapport entier et par translation de $log(k)$ et $-log(l)$ on conclut que c'est $\mathbb{R}$ tout entier. $\square$

Lemme 12. *Soit* $\mathcal{A} = (Q, I, F, \Sigma, \delta)$ *un automate fini et* $s \in Q$. *On pose*

$$L_s = \{|w| \in \mathbb{N} \mid w \in \Sigma^*, \delta(s, w) \in F\}$$

L_s *est ultimement périodique.*

Démonstration. D'après la Proposition 5, cela revient à montrer que L_s est rationnel. On définit l'automate $\mathcal{A}' = (Q, \{s\}, F, \{0\}, \delta')$ avec la fonction de transition : pour $q, q' \in Q$ et $u \in \{0\}$, $\delta' : q \overset{u}{\longmapsto} q'$ si et seulement s'il existe $w \in \Sigma^*$ tel que $|w| = |u|$ et $\delta : q \overset{w}{\longmapsto} q'$. La représentation de L_s dans $\{0\}^*$ est le langage reconnu par $\mathcal{A}'$. $\square$

Lemme 13. *Soient* $m, n, a, b, c, d \geq 1$ *entiers tel que* $n < m$ *et* $k, l \geq 2$ *deux entiers multiplicativement indépendants. Alors il existe des entiers* $p, q \geq 1$ *tel que*

$$nl^{c+dq} \leq mk^{a+bp} < (m+1)k^{a+bp} \leq (n+1)l^{c+dq}$$

Démonstration. Ceci revient à montrer qu'il existe des entiers $p, q \geq 1$ tel que

$$\frac{nl^c}{mk^a} \leq \frac{(k^b)^p}{(l^d)^q} \leq \frac{(n+1)l^c}{(m+1)k^a}$$

Or k^b et l^d sont encore multiplicativement indépendants, on on conlclut par le Lemme 11. $\square$

Lemme 14. *Soit* $k \geq 2$ *un entier et* $X \subseteq \mathbb{N}$ *un ensemble* k*-rationnel infini. Alors il existe des entiers* $m, a, b \geq 1$ *tel que pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $X \cap [mk^{a+bp}, (m+1)k^{a+bp}[\neq \emptyset$. *De plus,* m *peut-être choisi arbitrairement grand.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (Q, I, F, [|0, k-1|], \delta)$ un automate émmondé reconnaissant $(X)_k$ et $s \in Q$ un état dans lequel on peut tomber pour une infinité d'entiers (s existe car X est infini). Alors L_s est infini. D'après le Lemme 12, il existe $a, b \geq 1$ tel que $\{a + bp \mid p \in \mathbb{N}\} \subseteq L_s$. Alors pour tout entier m conduisant à s à partir d'un état initial, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X \cap [mk^{a+bp}, (m+1)k^{a+bp}[\neq \emptyset$. $\square$

Lemme 15. *Soit* $l \geq 2$ *entier et* X *un ensemble* l*-rationnel infini. Soit* $\mathcal{A} = (Q, \{i_0\}, F, [|0, l-1|], \delta)$ *un automate déterministe émmondé reconnaissant* $(X)_l$. *Supposons qu'il existe* $s \in Q$ *tel que* $\mathbb{N} \setminus L_s$ *infini. Alors il existe des entiers* $n, c, d \geq 1$ *tel que pour tout* $q \in \mathbb{N}$, $X \cap [nl^{c+dq}, (n+1)l^{c+dq}[= \emptyset$.

Démonstration. Si $s = i_0$ et 0 est le seul entier conduisant à i_0, alors au moins un autre état $s' \neq i_0$ vérifie $\mathbb{N} \setminus L_{s'}$ infini. On peut donc supposer qu'il existe un entier $n \geq 1$ conduisant de i_0 à s. D'après le Lemme 12, L_s est ultimement périodique, et comme $\mathbb{N} \setminus L_s$ est infini, il existe des entiers $c, d \geq 1$ tel que $\{c+dq \mid q \in \mathbb{N}\} \cap L_s = \emptyset$. Comme $\mathcal{A}$ est déterministe, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $X \cap [nl^{c+dq}, (n+1)l^{c+dq}[= \emptyset$. $\square$

Lemme 16. *Soient $k, l \geq 2$ entiers multiplicativement indépendants, $X \subseteq \mathbb{N}$ ensemble infini à la fois k et l-rationnel et $\mathcal{A} = (Q, \{i_0\}, F, [|0, l-1|], \delta)$ un automate déterministe émmondé reconnaissant $(X)_l$. Alors pour tout $s \in Q$, $\mathbb{N} \setminus L_s$ est fini.*

Démonstration. Suppons par l'absurde que ce n'est pas le cas.

D'après le Lemme 15, il existe des entiers $n, c, d \geq 1$ tel que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $X \cap [nl^{c+dq}, (n+1)l^{c+dq}[= \emptyset$. En appliquant le Lemme 14, il existe des entiers $m > n$, $a, b \geq 1$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X \cap [mk^{a+bp}, (m+1)k^{a+bp}[\neq \emptyset$. Or d'après le Lemme 13, il existe des entiers $p, q \geq 1$ tel que

$$nl^{c+dq} \leq mk^{a+bp} < (m+1)k^{a+bp} \leq (n+1)l^{c+dq}$$

On aboutit à une contradiction. $\square$

On est en mesure maintenant de prouver le Théorème 10 :

Soit $\mathcal{A} = (Q, \{i_0\}, F, [|0, l-1|], \delta)$ un automate déterministe émmondé reconnaissant $(X)_l$. D'après le Lemme 16, pour tout $s \in Q$, $\mathbb{N} \setminus L_s$ est fini. Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $s \in Q$, $N \in L_s$. Considérons maintenant un entier $n > l^{N-1}$. $(n)_l$ est de longueur $\geq N$. Soit w le prefixe de $(n)_l$ obtenu en enlevant les N dernières lettres de $(n)_l$ et $s = \delta(i_0, w)$. Comme $N \in L_s$, on peut trouver u un mot de longueur N tel que $\delta(s, u) \in F$. Alors $m = [wu]_l \in X$ et $|m - n| \leq l^N$. Donc X est l^N-quasi-périodique. $\square$

Voici un résultat sur les ensembles quasi-périodiques utilisé dans la démonstration du théorème de Cobham :

Proposition 17. *Soit X un ensemble d-quasi-périodique. Pour tous $K, L, h \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$ réel tel que $K < L < K + \eta$, il existe $x \in X$ et $y \in \mathbb{N}$ tel que*

$$yL \leq xK + h \leq yL + \eta d$$

Démonstration. Soir r le plus petit entier positif vérifiant $rK + h \leq rL$. Alors pour tout $i \geq 1$, $(r-i)L < (r-i)K + h$, que $r - i$ soit positif ou négatif. Alors :

$$(r-i)K + h = rK + h - iK < rL - iK < rL - iL + i\eta = (r-i)L + i\eta$$

Ainsi, pour $1 \leq i \leq d$ on a les inégalités :

$$(r-i)L < (r-i)K + h < (r-i)L + \eta d \quad (*)$$

On peut trouver $j \in \mathbb{N}$ tel que $jL + r - d \geq 0$ et $jK + r - d \geq 0$. Dans l'inégalité $(*)$, on ajoute à chaque terme jKL pour obtenir que pour tout $1 \leq i \leq d$

$$(jK + r - i)L < (jL + r - i)K + h < (jK + r - i)L + \eta d$$

Comme X est d-quasi-périodique, il existe $1 \leq i \leq d$ tel que $x = jL + r - i \in X$, ce qui conclut. $\square$

4 Preuve du théorème de Cobham

Théorème 18. *Soient $k, l \geq 2$ deux entiers multiplicativement indpendants. Alors tout ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ à la fois k et l-rationnel est rationnel. (voir [4] ou [2])*

Démonstration. Si X est fini, le résultat est clair. Supposons donc que X est infini. On pose pour $t, p \geq 0$ entiers l'ensemble

$$E_{t,p} = \{y \in \mathbb{N} \mid yk^p + t \in X\}$$

D'après la Proposition 1, $E_{t,p}$ est l-rationnel. On définit sur $\mathbb{N}$ la relation d'équivalence ρ_k : $x \sim y \ (mod\ \rho_k)$ si et seulement si $(x)_k^{-1}(X)_k = (y)_k^{-1}(X)_k$. L'ensemble $\mathbb{N}/\ \rho_k$ est fini car X est k-rationnel. Les classes d'équivalence obtenues sont k-stables dans le sens où si $x \sim y \ (mod\ \rho_k)$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout entier $t < k^p$,

$$xk^p + t \sim yk^p + t \ (mod\ \rho_k).$$

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ un système de représentants de $\mathbb{N}/\ \rho_k$. Fixons $1 \leq i \leq n$. On prend pour $j \neq i$ un mot $z_j \in (x_i)_k^{-1}(X)_k \setminus (x_j)_k^{-1}(X)_k$ et on pose $p_j = |z_{i,j}|$, $t_j = [z_j]_k$. La classe de x_i modulo ρ_k est

$$\bigcap_{j \neq i} E_{t_j, p_j}$$

et donc est en particulier l-rationnelle.

Pour $1 \leq i \leq n$, on considère un atomate fini déterministe complet $\mathcal{A}_i = (Q_i, \{q_i^0\}, F_i, [|0, l-1|], \delta_i)$ reconnaissant la classe de x_i modulo ρ_k en écriture en base l. Soit $\mathcal{A}$ l'automate produit

$$\mathcal{A} = (Q_1 \times ... \times Q_n, \{q^0 = (q_1^0, ..., q_n^0)\}, F_1 \times ... \times F_n, [|0, l-1|], \delta)$$

où $\delta((q_1...q_n), a) = (\delta_1(q_1, a), ..., \delta_n(q_n, a))$. On définit la relation d'équivalence θ sur $\mathbb{N}$ par $x \sim y \ (mod\ \theta)$ si et seulement si $\delta(q^0, (x)_l) = \delta(q^0, (y)_l)$. θ est un rafinement l-stable de ρ_k, c.a.d que si $x \sim y \ (mod\ \theta)$ alors $x \sim y \ (mod\ \rho_k)$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$, pour tout entier $t < l^q$,

$$xl^q + t \sim yl^q + t \ (mod\ \theta).$$

On note c le cardinal de $\mathbb{N}/\theta$, c.a.d. le nombre d'états de $\mathcal{A}$.

On introduit deux mots infinis : $u = u_1u_2...u_n...$ sur l'alphabet $\mathbb{N}/\rho_k$ où u_n est la classe de n modulo ρ_k ; et $v = v_1v_2...v_n...$ sur l'alphabet $\mathbb{N}/\theta$ où v_n est la classe de n modulo θ. Comme ρ_k est un raffinement de la relation sur $\mathbb{N}$: $x \sim y$ si et seulement si $x, y \in X$ ou $x, y \in \mathbb{N} \setminus X$, si u est ultimement périodique, et c'est ce que l'on va montrer , alors X l'est. Plus précisément, on va montrer qu'il existe un entier m tel que u à moins de m facteurs récurrents de longueurs m, et on conclura par la Proposition 8.

Soit w un facteur récurrent de u de longueur 2. Comme les classes d'équivalence de ρ_k sont à la fois k et l-rationnelles, l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}$ tel que $w = u_nu_{n+1}$ est à la fois k et k-rationnel (et bien sûr infini). Donc d'après le Théorème 10, cet ensemble est quasi-périodique. On prend donc un entier $d \geq 1$ tel que pour tout w facteur récurrent de u de longueur 2, l'ensemble des indices de début de w est d-quasi-périodique. On choisit un réel $0 < \varepsilon < 1$ tel que $\frac{c\varepsilon}{1-\varepsilon} < \frac{1}{2}$, et des entiers $p, q \geq 0$ tel que $1 < \frac{l^q}{k^p} < 1 + \frac{\varepsilon}{d}$.

Soient $K = k^p$, $L = l^q$ et $m = \lfloor K(1-\varepsilon) \rfloor$. On va montrer que pour tout facteur récurent w de longueur m de u, il existe $y \in \mathbb{N}$ tel que

$$u[yL, (y+1)L] = swt$$

avec $|s| \leq \varepsilon K$.

Tout d'abord, comme w est un facteur récurrent de u de longueur inférieure à K, w apparaît une infinité de fois dans des facteurs de u de la forme $u[xK, (x+2)K]$. Or comme la relation ρ_k est k-stable, la valeur d'un facteur $u[xK, (x+2)K]$ ne dépend que de la valeur de $u[x, x+2]$. Dans l'ensemble des valeurs de $u[x, x+2]$ où $u[xK, (x+2)K]$ est un facteur contenant w, une valeur est atteinte une infinité de fois. Il existe donc un ensemble d-quasi-périodique $\mathcal{I}$ d'indices tel que pour tout $x, x' \in \mathcal{I}$, $x \sim x'$ $(mod\ \rho_k)$ et $(x+1) \sim (x'+1)$ $(mod\ \rho_k)$, et de plus pour tout $x \in \mathcal{I}$, w est un facteur de $u[xK, (x+2)K]$. Les facteurs $u[xK, (x+2)K]$ pour $x \in \mathcal{I}$ sont égaux entre eux et s'écrivent

$$u[xK, (x+2)K] = w'ww''.$$

Posons maintenant $h = |w'|$ et $\eta = K\frac{\varepsilon}{d}$. On a $K < L < K + \eta$ par construction. En appliquant la Proposition 17. à $\mathcal{I}$, (qui est d-quasi-périodique) et à K, L, h, η, on obtient l'existence d'un entier y tel que

$$u[yL, (y+1)L] = swt$$

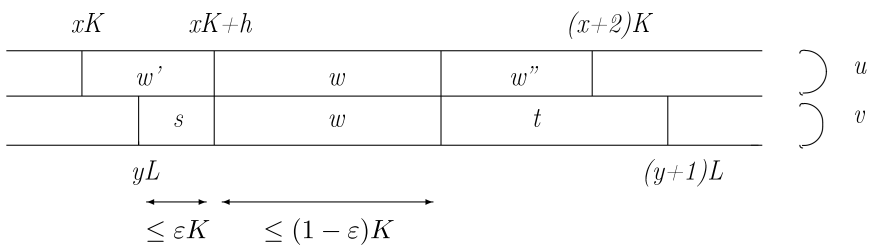
avec $|s| \leq d\eta = \varepsilon K$.

Or la valeur de $u[yL, (y+1)L]$ est entièrement déterminée par la valeur de v_y car θ est un raffinement l-stable de ρ_k. Donc $u[yL, (y+1)L]$ peut prendre au plus c valeurs. De plus $|s|$ peut prendre au plus εK valeurs. Donc un facteur récurrent w de u de longueur m peut prendre au plus εKc valeurs. Or

$$\varepsilon Kc \leq \frac{1}{2}K(1-\varepsilon) \leq \frac{1}{2}(m+1) \leq m$$

Donc u est ultimement périodique. Donc X est ultimement périodique, soit rationnel. □

Position du facteur w :



Références

[1] O. Carton. *Langages formels, calculabilité et complexité.* Vuibert, 2008.

[2] J.-P.Allouche et J.Shallit. *Automatic sequences.* Cambridge University Press, 2003.

[3] M. Rigo et L. Waxweiler. A note on syndeticity, recongnizable sets, and cobham's theoreme. *Bull. of the EATCS*, (88) :169–173, February 2006.

[4] D. Perrin. Finite automata. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B, chapter 1, pages 1–57. Elsevier, 1990.