Motifs Inévitables

Raphaël Rose-Andrieux

21 janvier 2010

1. Définitions
   - Evitabilité
   - Exemples

2. Evitabilité absolue
   - Mots de Zimin
   - Algorithme de Zimin

3. Evitabilité sur un alphabet de cardinal fixé
   - Le cas binaire
   - Majorant de la longueur d'un motif inévitable

Deux Alphabets

A=$\{$a,b,c,...$\}$
E=$\{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$

$p(A^+)$

Le langage associé à un motif p, noté $p(A^+)$, est constituer de tous les mots de la forme h(p), où h est un morphisme non-effaçant de E^* dans A^* qui à chaque variable associe un élément de A^*.

Exemple

Le langage associé au motif $\alpha\beta\alpha$ est $\{uvu\ ,\ u \in A^*\ ,\ v \in A^*\}$

On dit qu'un mot rencontre un motif p si un de ses facteurs est dans $p(A^+)$. Sinon on dit qu'il évite p.

Evitabilité sur A

p évitable sur A $\Leftrightarrow$ Il existe une infinité de mots de A évitant p $\Leftrightarrow$ Il existe un mot infini sur A évitant p

Evitabilité Absolue

p est inévitable $\Leftrightarrow$ Il n'existe pas d'alphabet évitant p (inversement évitable)

k-Evitabilité

On dit qu'un motif est k-évitable s'il est évitable sur un alphabet de k lettres

$\alpha\beta$

$\alpha\beta$ est inévitable car quel que soit l'alphabet tout mot de plus de deux lettres rencontre trivialement $\alpha\beta$.

$\alpha\alpha$

$\alpha\alpha$ est 2-inévitable. En effet essayons de construire un mot infini sur $\{a, b\}$ évitant $\alpha\alpha$: a

$\alpha\beta$

$\alpha\beta$ est inévitable car quel que soit l'alphabet tout mot de plus de deux lettres rencontre trivialement $\alpha\beta$.

$\alpha\alpha$

$\alpha\alpha$ est 2-inévitable. En effet essayons de construire un mot infini sur $\{a, b\}$ évitant $\alpha\alpha$: ab

$\alpha\beta$

$\alpha\beta$ est inévitable car quel que soit l'alphabet tout mot de plus de deux lettres rencontre trivialement $\alpha\beta$.

$\alpha\alpha$

$\alpha\alpha$ est 2-inévitable. En effet essayons de construire un mot infini sur $\{a, b\}$ évitant $\alpha\alpha$: aba

$\alpha\beta$

$\alpha\beta$ est inévitable car quel que soit l'alphabet tout mot de plus de deux lettres rencontre trivialement $\alpha\beta$.

$\alpha\alpha$

$\alpha\alpha$ est 2-inévitable. En effet essayons de construire un mot infini sur $\{a, b\}$ évitant $\alpha\alpha$: *aba*?
Par contre on peut montrer que $\alpha\alpha$ est 3-évitable.

Proposition

Soit p un motif inévitable sur A, et ψ une variable n'apparaissant pas dans p. Alors le motif pψp est encore inévitable sur A.

Preuve : Soit k = Card(A).
Soit p un motif inévitable. Il existe un entier l tel que tout mot $w \in A^l$ rencontre p.
Cet ensemble contient k^l éléments. Posons N= $(k^l + 1)l + k^l$.
Soit $w \in A^N$. w peut être vu comme une série de $k^l + 1$ mots de A^l séparés par une lettre.
Parmi ces $k^l + 1$ mots deux sont obligatoirement identiques. On peut donc écrire $w = u_0vu_1vu_2$ avec $v \in A^l$ et $|u_1| \geq 1$. Il existe un morphisme h et deux mots v_0 et v_1 tels que $v = v_0$h(p)v_1. En posant h(ψ)=$v_1u_1v_0$ on voit que w a h(pψp) comme facteur.
Donc pψp est inévitable.

Mots de Zimin

On définit les mots de Zimin par récurrence :
Soient $(\alpha_n)_{n \in N}$ différentes variables de E. On pose $Z_0 = \epsilon$ et pour tout $n > 0$ $Z_n = Z_{n-1}\alpha_{n-1}Z_{n-1}$

Processus de réduction

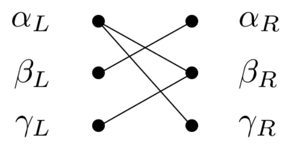
Pour montrer que le problème de l'évitabilité est décidable, nous allons montrer que c'est équivalent à une propriété de reductibilité

Graphe d'adjacence

Soit p$\in$ E^* un motif. Le graphe d'adjacence de p, noté AG(p) , est constitué de deux colonnes de sommets qui sont des copies de E et que l'on notera E_L et E_R. Une arête relie deux sommets α_L et β_R si et seulement si $\alpha\beta$ est un facteur de p.

Exemple

Le graphe associé au motif $\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha$ est :



Processus de réduction

Ensemble libre

Un sous-ensemble F de E^* est dit *libre* si pour tout α et β appartenant à F il n'existe pas de chemin reliant α_L et β_R.

Soit p un motif et F un sous-ensemble libre de E^*. On dit que p se réduit en q en une étape, noté p $\longrightarrow$ q , en supprimant dans p toutes les variables contenues dans F.
On dit que p est réductible s'il existe une série de réduction en une étape menant de p à ϵ .

Exemple

Dans l'exemple précédent, p=$\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha$, en supprimant l'ensmble libre $\{\alpha\}$ on obtient $\beta\gamma\beta$. En supprimant ensuite l'ensemble libre $\{\beta\}$ on obtient γ qui se réduit enfin au mot vide.
Cependant, si l'on avait commencer par supprimer l'ensemble libre $\{\beta\}$, on aurait obtenu $\alpha\alpha\gamma\alpha$ qui est irréductible.

Théorème

Un motif est évitable si et seulement s'il est irréductible.

L'algorithme de Zimin consiste donc à explorer toutes les séquences possibles de réduction en une étape. En pratique l'arbre à explorer peut être grand et cette méthode est plutôt inefficace.

Divisibilité

Soient 2 motifs p et p'. On dit que p divise p' (noté p|p') si en considérant p' comme un mot, il rencontre le motif p.(exemple $\alpha\alpha$ divise $\alpha\beta\gamma\beta\gamma$)
Si p|p' et p'|p, on dit que p et p' sont équivalents. (exemple : $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$)

On s'intéresse maintenant au cas où les motifs contiennent uniquement deux variables (E=$\{\alpha, \beta\}$).

Index d'évitabilité

On appelle index d'évitabilité d'un motif p, le plus petit entier k tel que p soit k-évitable (∞ si celui-ci n'existe pas). Il est noté $\mu(p)$.

Il n'existe pas d'algorithme permettant de trouver l'index d'évitabilité d'un motif p. Par exemple, on ne sait toujours pas si l'index d'évitabilité de $\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma$ est égal à deux ou à trois.

Il n'y a qu'un nombre fini de motifs binaires non divisible par $\alpha\alpha$, et ceux-ci sont tous inévitables. Ainsi, les motifs binaires se regroupent en trois catégories : ceux d'index d'évitabilité égal à deux, trois ou ∞.

Définition : l_{nk}

l_{nk}=min{ l entier, tel que tout motif à n variables de longueur plus grande que l est k-évitable } (∞ si l'ensemble est vide)

On voit facilement que $l_{nk} \leq l_{n'k'}$ si n≤n' et k≥k'.

Théorème

$l_{n\infty} = 2^n$

Preuve : Tout d'abord $l_{n\infty} \geq 2^n$ car le motif de Zimin Z_n est inévitable, contient n variables et est de longueur $2^n - 1$.
Montrons par récurrence que si un motif p contient n variables et que p est inévitable alors $|p| < 2^n$.
Pour p contenant 1 variable le résultat est vrai car $\alpha\alpha$ est évitable.
Supposons que le résultat est vrai pour n. Soit p un motif inévitable contenant $n+1$ variables. Il existe une variable α n'apparaissant qu'une seule fois dans p (sinon p ne pourrait pas se réduire à l'ensemble vide). On peut donc écrire p $=p_1\alpha p_2$ et p_1 et p_2 contiennent n variables. Comme p_1 et p_2 sont inévitables (car ce sont des diviseurs de p) d'après l'hypothèse de récurrence $|p_1| < 2^n$ et $|p_2| < 2^n$ donc $|p| < 2^{n+1}$.