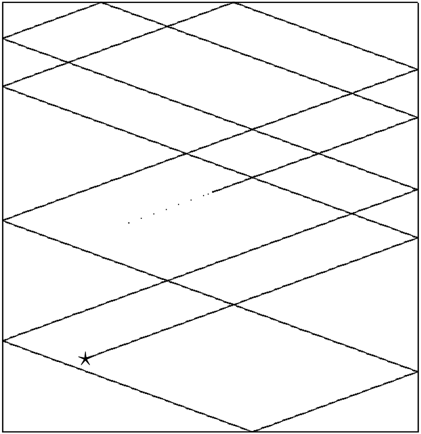
Mots sturmiens, entre ordre et chaos

S. Bizien

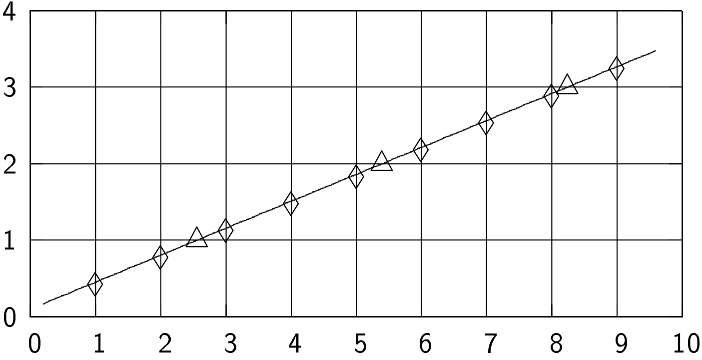
7 janvier 2010

La boule et le billard



110111011101...

La droite



Le billard déplié

Définition

Proposition

Si $\omega_{\alpha,\beta}$ est le code de la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$, alors :

$$\omega_{\alpha,\beta}(n) = \left[\frac{1}{\alpha+1}(\alpha(n+2)+\beta)\right] - \left[\frac{1}{\alpha+1}(\alpha(n+1)+\beta)\right]$$

Propriété

Le mot $\omega_{\alpha,\beta}$ est périodique si et seulement si α est rationnel.

Ordre, chaos et équilibre

Définition : Facteur

Un *facteur* d'un mot infini $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un mot fini de la forme $f = (w_{k+n})_{1\leq n\leq l}$.

Définition : Mot équilibré

Un mot infini est dit *équilibré* quand, pour tout entier n non nul, pour f et g deux facteurs de ce mot de longueur n, le nombre de 1 dans f et le nombre de 1 dans g diffère au plus d'une unité.

Proposition

Tout mot sturmien est équilibré.

Complexité

Définition

La *complexité* d'un mot infini et la suite d'entiers (p_n), où p_n est le nombre de facteurs de longueur n de ce mot.

Exemples

Mots périodiques : p_n est ultimement constante.
Mots univers : $p_n = 2^n$

Faibles complexités

Proposition

S'il existe n tel que $p_{n+1} = p_n$, alors le mot est ultimement périodique.

Corollaire

S'il existe n tel que $p_n = n$, alors le mot est ultimement périodique.

Mots sturmiens : peu chaotiques...

Proposition

La complexité d'un mot sturmien apériodique est $p_n = n + 1$.

... mais quand même

Proposition

Le langage des facteurs d'un mot sturmien est rationnel si et seulement si la pente définissant ce mot est rationnelle.

Lemme

Si f est facteur d'un mot sturmien de pente α, alors, en notant $h(f)$ le nombre de 1 dans f :

$$\left|\frac{h(f)}{|f|} - \frac{\alpha}{\alpha+1}\right| \leq \frac{1}{|f|}$$

Remerciements

Merci à Jean-Paul Allouche pour ses conseils et remarques avisés.