

λ -calcul et théorème de Church-Rosser

Adrien SURÉE

20 janvier 2011

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u, x \in V$ (abstraction)

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u, x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme)

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u, x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme) \square

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u, x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme) $(\square)(\square)$

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u, x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme) $(\lambda x.\square)(\square)$

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u, x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme) $(\lambda x.x)(\square)$

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u, x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme) $(\lambda x.x)(y)$

Définition

Une occurrence d'une variable x est dite liée dans u si il existe $\lambda x.v$ un sous-terme de u tel que cette occurrence appartient à u . Dans le cas contraire elle est dit libre.

Définition

Une occurrence d'une variable x est dite liée dans u si il existe $\lambda x.v$ un sous-terme de u tel que cette occurrence appartient à u . Dans le cas contraire elle est dit libre.

Exemple

$$(\lambda x.yx)z$$

Définition

Une occurrence d'une variable x est dite liée dans u si il existe $\lambda x.v$ un sous-terme de u tel que cette occurrence appartient à u . Dans le cas contraire elle est dit libre.

Exemple

$$(\lambda x.yx)z$$

Définition

On note $u \langle x := t \rangle$ la substitution simple de x par t dans u c'est-à-dire u où on a remplacé toutes les occurrences libres de x par t .

Définition

On note $u < x := t >$ la substitution simple de x par t dans u c'est-à-dire u où on a remplacé toutes les occurrences libres de x par t .

Exemple

$$(\lambda x.xy)(xx) < x := \lambda z.z >$$

Définition

On note $u < x := t >$ la substitution simple de x par t dans u c'est-à-dire u où on a remplacé toutes les occurrences libres de x par t .

Exemple

$$(\lambda x.xy)(xx) < x := \lambda z.z >$$

Définition

On note $u < x := t >$ la substitution simple de x par t dans u c'est-à-dire u où on a remplacé toutes les occurrences libres de x par t .

Exemple

$$(\lambda x.xy)((\lambda z.z)(\lambda z.z))$$

Définition

L' α -équivalence consiste à renommer un lambda et les variables liées correspondantes sans capturer d'éventuelles variables libres. Il suffit pour cela de choisir une nouvelle variable qui n'est pas libre dans ce terme.

Définition

L' α -équivalence consiste à renommer un lambda et les variables liées correspondantes sans capturer d'éventuelles variables libres. Il suffit pour cela de choisir une nouvelle variable qui n'est pas libre dans ce terme.

Exemple

$\lambda x.yx$ est α -équivalent à $\lambda z.zy$ mais pas à $\lambda y.yy$.

Par la suite on travaille à α -équivalence près.

Le problème de la substitution simple est qu'elle modifie le sens d'un terme, des variables libres du terme remplaçant peuvent être capturées. La substitution correcte utilise l' α -équivalence pour éviter cette situation.

Définition

On note $u[x := t]$ la substitution correcte de x par t dans u c'est-à-dire $u' < x := t >$ avec u' α -équivalent à u et tel que les variables libres de t ne soient pas capturées lors du remplacement.

Le problème de la substitution simple est qu'elle modifie le sens d'un terme, des variables libres du terme remplaçant peuvent être capturées. La substitution correcte utilise l' α -équivalence pour éviter cette situation.

Définition

On note $u[x := t]$ la substitution correcte de x par t dans u c'est-à-dire $u' < x := t >$ avec u' α -équivalent à u et tel que les variables libres de t ne soient pas capturées lors du remplacement.

Exemple

- $(\lambda x.xy)[y := (\lambda y.x)] = \lambda z.z(\lambda y.x)$
- $(\lambda x.(\lambda y.z))[z := xy] = (\lambda z_0.(\lambda z_1.xy))$

Définition

On a $u \rightarrow_{\beta_0} u'$ ssi on peut obtenir u' en remplaçant un redex $(\lambda x.v)w$ de u par $v[x := w]$.

On appelle β la clôture réflexive et transitive de β_0 .

Définition

On a $u \rightarrow_{\beta_0} u'$ ssi on peut obtenir u' en remplaçant un redex $(\lambda x.v)w$ de u par $v[x := w]$.

On appelle β la clôture réflexive et transitive de β_0 .

Exemple

$$(\lambda x.x)((\lambda y.y(zy))(\lambda z.z))$$

Définition

On a $u \rightarrow_{\beta_0} u'$ ssi on peut obtenir u' en remplaçant un redex $(\lambda x.v)w$ de u par $v[x := w]$.

On appelle β la clôture réflexive et transitive de β_0 .

Exemple

$$(\lambda x.x)((\lambda y.y(z y))(\lambda z.z))$$

Définition

On a $u \rightarrow_{\beta_0} u'$ ssi on peut obtenir u' en remplaçant un redex $(\lambda x.v)w$ de u par $v[x := w]$.

On appelle β la clôture réflexive et transitive de β_0 .

Exemple

$$(\lambda x.x)((\lambda y.y(zy))(\lambda z.z))$$

Définition

On a $u \rightarrow_{\beta_0} u'$ ssi on peut obtenir u' en remplaçant un redex $(\lambda x.v)w$ de u par $v[x := w]$.

On appelle β la clôture réflexive et transitive de β_0 .

Exemple

$$(\lambda x.x)((\lambda z.z)(z(\lambda z.z)))$$

Définition

On dit qu'un terme est sous forme normale s'il ne peut plus être β -réduit, cela signifie qu'il ne contient pas de redex.

Définition

Une relation \rightarrow est confluente ssi

$$(u \rightarrow v) \wedge (u \rightarrow v') \Rightarrow \exists w. (v \rightarrow w) \wedge (v' \rightarrow w)$$

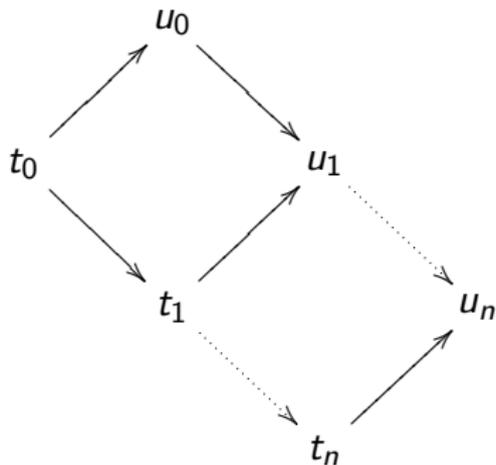
Théorème

(*Church-Rosser*) La β -réduction est confluente.

- On montre d'abord que si une relation est confluente alors sa clôture réflexive et transitive l'est aussi ;
- ensuite, il suffit de prendre une relation bien choisie dont on prouvera la confluence ;
- et enfin il faut prouver que la β -réduction est la clôture réflexive et transitive de cette relation.

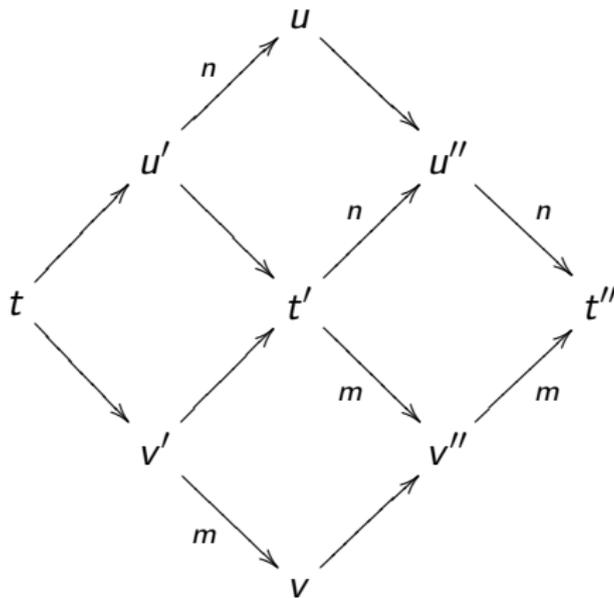
Confluence de la clôture réflexive et transitive (1)

On montre d'abord que si $t_0 \rightarrow u_0$ et $t_0 \rightarrow \dots \rightarrow t_n$ alors il existe u_1, \dots, u_n tels que $u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_n$ et $t_n \rightarrow u_n$.



Confluence de la clôture réflexive et transitive (2)

On montre ensuite le résultat général.



Définition

On a $u \rightarrow_{\beta_s} v$ si on peut obtenir v en réduisant simultanément un nombre quelconque de redex de u .

Définition

On a $u \rightarrow_{\beta_s} v$ si on peut obtenir v en réduisant simultanément un nombre quelconque de redex de u .

Propriétés

- Cette relation a bien la β -réduction comme clôture puisqu'elle est contenue dans la β_0 -réduction et est contenue dans la β -réduction.
- D'autre part, elle est bien confluente puisqu'on a la propriété (plus forte) que pour tout u il existe u^* tel que $u \rightarrow_{\beta_s} v \Rightarrow v \rightarrow_{\beta_s} u^*$. Ce u^* est obtenu en réduisant tous les redex de u .