λ-calcul et théorème de Church-Rosser

Adrien SURÉE

20 janvier 2011

Syntaxe du λ-calcul

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u$, $x \in V$ (abstraction)

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u$, $x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme)

Syntaxe du λ-calcul

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u$, $x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme) $\square$

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u$, $x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme) $(\Box)(\Box)$

Syntaxe du λ-calcul

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u$, $x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme) $({\color{red}\lambda x.}\Box)(\Box)$

Syntaxe du λ-calcul

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u$, $x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme) $(\lambda x.x)(\square)$

Syntaxe du λ-calcul

Définition

Un terme est de la forme :

- $x \in V$ (variable)
- uv (application)
- $\lambda x.u$, $x \in V$ (abstraction)

Exemple

(Construction d'un terme) $(\lambda x.x)(y)$

Variables libres et liees

Définition

Une occurrence d'une variable x est dite liée dans u si il existe $\lambda x.v$ un sous-terme de u tel que cette occurrence appartient à u. Dans le cas contraire elle est dit libre.

Variables libres et liees

Définition

Une occurrence d'une variable x est dite liée dans u si il existe $\lambda x.v$ un sous-terme de u tel que cette occurrence appartient à u. Dans le cas contraire elle est dit libre.

Exemple

$$(\lambda x.yx)z$$

Variables libres et liees

Définition

Une occurrence d'une variable x est dite liée dans u si il existe $\lambda x.v$ un sous-terme de u tel que cette occurrence appartient à u. Dans le cas contraire elle est dit libre.

Exemple

$$(\lambda x.yx)z$$

Substitution simple

Définition

On note $u < x := t >$ la substitution simple de x par t dans u c'est-à-dire u où on a remplacé toutes les occurrences libres de x par t.

Substitution simple

Définition

On note $u < x := t >$ la substitution simple de x par t dans u c'est-à-dire u où on a remplacé toutes les occurrences libres de x par t.

Exemple

$$(\lambda x.xy)(xx) < x := \lambda z.z >$$

Substitution simple

Définition

On note $u < x := t >$ la substitution simple de x par t dans u c'est-à-dire u où on a remplacé toutes les occurrences libres de x par t.

Exemple

$$(\lambda x.xy)(xx) < x := \lambda z.z >$$

Substitution simple

Définition

On note $u < x := t >$ la substitution simple de x par t dans u c'est-à-dire u où on a remplacé toutes les occurrences libres de x par t.

Exemple

$$(\lambda x.xy)((\lambda z.z)(\lambda z.z))$$

α-équivalence

Définition

L'α-équivalence consiste à renommer un lambda et les variables liées correspondantes sans capturer d'éventuelles variables libres. Il suffit pour cela de choisir une nouvelle variable qui n'est pas libre dans ce terme.

α-équivalence

Définition

L'α-équivalence consiste à renommer un lambda et les variables liées correspondantes sans capturer d'éventuelles variables libres. Il suffit pour cela de choisir une nouvelle variable qui n'est pas libre dans ce terme.

Exemple

$\lambda x.yx$ est α-équivalent à $\lambda z.zy$ mais pas à $\lambda y.yy$.

Par la suite on travaille à α-équivalence près.

Substitution correcte

Le problème de la substitution simple est qu'elle modifie le sens d'un terme, des variables libres du terme remplaçant peuvent être capturées. La substitution correcte utilise l'α-équivalence pour éviter cette situation.

Définition

On note $u[x := t]$ la substitution correcte de x par t dans u c'est-à-dire $u' < x := t >$ avec u' α-équivalent à u et tel que les variables libres de t ne soient pas capturées lors du remplacement.

Substitution correcte

Le problème de la substitution simple est qu'elle modifie le sens d'un terme, des variables libres du terme remplaçant peuvent être capturées. La substitution correcte utilise l'α-équivalence pour éviter cette situation.

Définition

On note $u[x := t]$ la substitution correcte de x par t dans u c'est-à-dire $u' < x := t >$ avec u' α-équivalent à u et tel que les variables libres de t ne soient pas capturées lors du remplacement.

Exemple

- $(\lambda x.xy)[y := (\lambda y.x)] = \lambda z.z(\lambda y.x)$
- $(\lambda x.(\lambda y.z))[z := xy] = (\lambda z_0.(\lambda z_1.xy))$

β_0-réduction

Définition

On a $u \rightarrow_{\beta_0} u'$ ssi on peut obtenir u' en remplaçant un redex $(\lambda x.v)w$ de u par $v[x := w]$.
On appelle β la clôture réflexive et transitive de β_0.

β_0-réduction

Définition

On a $u \rightarrow_{\beta_0} u'$ ssi on peut obtenir u' en remplaçant un redex $(\lambda x.v)w$ de u par $v[x := w]$.
On appelle β la clôture réflexive et transitive de β_0.

Exemple

$$(\lambda x.x)((\lambda y.y(zy))(\lambda z.z))$$

β_0-réduction

Définition

On a $u \to_{\beta_0} u'$ ssi on peut obtenir u' en remplaçant un redex $(\lambda x.v)w$ de u par $v[x := w]$.
On appelle β la clôture réflexive et transitive de β_0.

Exemple

$$(\lambda x.x)((\lambda y.y(zy))(\lambda z.z))$$

β_0-réduction

Définition

On a $u \rightarrow_{\beta_0} u'$ ssi on peut obtenir u' en remplaçant un redex $(\lambda x.v)w$ de u par $v[x := w]$.
On appelle β la clôture réflexive et transitive de β_0.

Exemple

$$(\lambda x.x)((\lambda y.y(zy))(\lambda z.z))$$

β_0-réduction

Définition

On a $u \to_{\beta_0} u'$ ssi on peut obtenir u' en remplaçant un redex $(\lambda x.v)w$ de u par $v[x := w]$.
On appelle β la clôture réflexive et transitive de β_0.

Exemple

$$(\lambda x.x)((\lambda z.z)(z(\lambda z.z)))$$

Normalisation

Définition

On dit qu'un terme est sous forme normale s'il ne peut plus être β-réduit, cela signifie qu'il ne contient pas de redex.

Théorème de Church-Rosser

Définition

Une relation $\rightarrow$ est confluente ssi

$$(u \rightarrow v) \wedge (u \rightarrow v') \Rightarrow \exists w.\ (v \rightarrow w) \wedge (v' \rightarrow w)$$

Théorème

(Church-Rosser) La β-réduction est confluente.

Idée de la preuve

- On montre d'abord que si une relation est confluente alors sa clôture réflexive et transitive l'est aussi ;
- ensuite, il suffit de prendre une relation bien choisie dont on prouvera la confluence ;
- et enfin il faut prouver que la β-réduction est la clôture réflexive et transitive de cette relation.

Confluence de la clôture réflexive et transitive (1)

On montre d'abord que si $t_0 \to u_0$ et $t_0 \to \ldots \to t_n$ alors il existe u_1, ..., u_n tels que $u_0 \to \cdots \to u_n$ et $t_n \to u_n$.

$$\begin{tikzcd}
 & u_0 \arrow[dr] & & \\
t_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & u_1 \arrow[dr, dotted] & \\
 & t_1 \arrow[ur] \arrow[dr, dotted] & & u_n \\
 & & t_n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Confluence de la clôture réflexive et transitive (2)

On montre ensuite le résultat général.

$$\begin{tikzcd}
 & & u \arrow[dr] & & \\
 & u' \arrow[ur, "n"] \arrow[dr] & & u'' \arrow[dr, "n"] & \\
t \arrow[ur] \arrow[dr] & & t' \arrow[ur, "n"] \arrow[dr, "m"] & & t'' \\
 & v' \arrow[ur] \arrow[dr, "m"] & & v'' \arrow[ur, "m"] & \\
 & & v \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Réduction simultanée

Définition

On a $u \to_{\beta_s} v$ si on peut obtenir v en réduisant simultanément un nombre quelconque de redex de u.

Réduction simultanée

Définition

On a $u \rightarrow_{\beta_s} v$ si on peut obtenir v en réduisant simultanément un nombre quelconque de redex de u.

Propriétés

- Cette relation a bien la β-réduction comme clôture puisqu'elle est contient la β_0-réduction et est contenue dans la β-réduction.
- D'autre part, elle est bien confluente puisqu'on a la propriété (plus forte) que pour tout u il existe u^* tel que $u \rightarrow_{\beta_s} v \Rightarrow v \rightarrow_{\beta_s} u^*$. Ce u^* est obtenu en réduisant tous les redex de u.