Complexité polynomiale

Un joli résultat sur $\Delta_2\mathbf{P}$ et le problème du voyageur de commerce

Who? Charles Fougeron

From? ENS Ulm

When? 20 janvier 2010

Plan

Le problème du voyageur de commerce

La classe $\mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$

Plan

Plan

Motivations

Le problème du voyageur de commerce

La classe $\mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$

Preuve

Le problème de satisfiabilité maximale

Problème du voyageur de commerce

Conclusion

Introduction du résultat

Le problème du voyageur de commerce peut être posé de plusieurs manières différentes, avec des complexités variables :

- Existe-t-il un chemin hamiltonien de poids inférieur à un certain entier donné ? PVC (D) (Que l'on sait **NP**).

Introduction du résultat

Le problème du voyageur de commerce peut être posé de plusieurs manières différentes, avec des complexités variables :

- Existe-t-il un chemin hamiltonien de poids inférieur à un certain entier donné ? PVC (D) (Que l'on sait **NP**).
- Le chemin hamiltonien de poids minimal est-il égal à un certain entier donné ? PVC EXACT

Introduction du résultat

Le problème du voyageur de commerce peut être posé de plusieurs manières différentes, avec des complexités variables :

- Existe-t-il un chemin hamiltonien de poids inférieur à un certain entier donné ? PVC (D) (Que l'on sait **NP**).
- Le chemin hamiltonien de poids minimal est-il égal à un certain entier donné ? PVC EXACT
- Quel est le coût du poids minimal ? PVC COÛT

Introduction du résultat

Le problème du voyageur de commerce peut être posé de plusieurs manières différentes, avec des complexités variables :

- Existe-t-il un chemin hamiltonien de poids inférieur à un certain entier donné ? PVC (D) (Que l'on sait **NP**).
- Le chemin hamiltonien de poids minimal est-il égal à un certain entier donné ? PVC EXACT
- Quel est le coût du poids minimal ? PVC COÛT
- Quel est le chemin minimal ? PVC

Introduction du résultat

Le problème du voyageur de commerce peut être posé de plusieurs manières différentes, avec des complexités variables :

- Existe-t-il un chemin hamiltonien de poids inférieur à un certain entier donné ? PVC (D) (Que l'on sait **NP**).
- Le chemin hamiltonien de poids minimal est-il égal à un certain entier donné ? PVC EXACT
- Quel est le coût du poids minimal ? PVC COÛT
- Quel est le chemin minimal ? PVC

C'est cette dernière instance du problème qui va nous intéresser. Nous allons introduire une nouvelle classe de complexité qui va très bien décrire ce problème, car il sera complet pour celle-ci.

Definition

Oracle

Pour élargir la classe **NP**, nous supposons disposer d'une machine mystérieuse, appelée oracle, qui résout instantanément un problème donné.

Si ce problème est SAT, par **NP**-complétude, l'oracle résoudra tous les problèmes **NP** en temps polynomial.

Ceci va nous permettre d'introduire une nouvelle classe.

Définition de la classe de complexité

$\mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$et $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$

On prend pour cette classe un oracle qui résout les problèmes **NP** (par exemple en résolvant SAT). La classe $\mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$est alors l'ensemble des problèmes que l'on peut résoudre en temps polynomial avec une machine ayant cet oracle. $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$est l'ensemble des fonctions calculables avec une telle machine.

Le but de la suite de cet exposé est de montrer l'intérêt de cette classe dans la classification du PVC, en montrant la $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$-completude de PVC.

Un exemple

Theorem

Le PVC est $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$*.*

Démonstration.

- Prenons comme problème résolu par l'oracle TSP(D), nous cherchons par dichotomie le coût minimal.
- Une fois le coût minimal trouvé, on enlève les arètes une à une, tout en vérifiant que le graphe a toujours un chemin de même poids minimal. Lorsqu'il reste $|sommets| + 1$ arètes, on a un chemin de poids minimal pour le graphe initial.

□

Un résultat intermédiaire

Definition

SAT maximale

On se donne une conjonction de clauses, à chacune desquelles on affecte un poids positif. Le problème consiste à trouver la table de vérité qui satisfait un poids maximal de clauses.

Theorem

SAT maximale est $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$*-complet*

Démonstration.

La preuve repose sur un réduction au problème MAX OUTPUT, qui est lui même $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$-complet. $\square$

Le but de la suite de l'exposé sera donc de réduire le PVC à SAT maximale.

Démonstration du théorème

Démonstration.

Nous avons déjà vu que PVC est dans $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$. Montrons à présent sa complétude.
Pour réduire SAT maximale à PVC, nous utilisons plusieurs artefacts qui traduiront chacun un propriété des formules logiques :

Démonstration.

Nous avons déjà vu que PVC est dans $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$. Montrons à présent sa complétude.
Pour réduire SAT maximale à PVC, nous utilisons plusieurs artefacts qui traduiront chacun un propriété des formules logiques :

- **Artefact du choix**

Démonstration du théorème

Démonstration.

Nous avons déjà vu que PVC est dans $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$. Montrons à présent sa complétude.
Pour réduire SAT maximale à PVC, nous utilisons plusieurs artefacts qui traduiront chacun un propriété des formules logiques :

- **Artefact du choix**
- **Artefact de clause**

Démonstration du théorème

Démonstration.

Nous avons déjà vu que PVC est dans $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$. Montrons à présent sa complétude.
Pour réduire SAT maximale à PVC, nous utilisons plusieurs artefacts qui traduiront chacun un propriété des formules logiques :

- **Artefact du choix**
- **Artefact de clause**
- **Artefact de consistance**

Démonstration du théorème

Démonstration.

Nous avons déjà vu que PVC est dans $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$. Montrons à présent sa complétude.
Pour réduire SAT maximale à PVC, nous utilisons plusieurs artefacts qui traduiront chacun un propriété des formules logiques :

- **Artefact du choix**
- **Artefact de clause**
- **Artefact de consistance**
- **Artefact du diamant**

Démonstration du théorème

Démonstration.

Nous avons déjà vu que PVC est dans $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$. Montrons à présent sa complétude.
Pour réduire SAT maximale à PVC, nous utilisons plusieurs artefacts qui traduiront chacun un propriété des formules logiques :

- **Artefact du choix**
- **Artefact de clause**
- **Artefact de consistance**
- **Artefact du diamant**

Finalement, le chemin minimal nous donnera les valeurs de vérité des différents littéraux pour une solution du problème de SAT maximale. □

Conclusion

Cette idée naturelle d'extension de la classe **NP**, décrit bien la complexité de certains problèmes.
Nous avons vu la $\mathbf{FP}^{\mathbf{NP}}$-complétude de PVC, mais elle est valable pour beaucoup de problèmes d'optimisation, tels que le problème du sac à dos et de la coupe maximale.

La hiérarchie polynomiale de complexité généralise cette idée, en continuant la construction avec des oracles :

Definition

Posons $\Delta_0\mathbf{P} = \Sigma_0\mathbf{P} = \Pi_0\mathbf{P} = \mathbf{P}$
Puis pour tout $i \geq 0$:
$\Delta_{i+1}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\Sigma_i\mathbf{P}}$
$\Sigma_{i+1}\mathbf{P} = \mathbf{NP}^{\Sigma_i\mathbf{P}}$
$\Pi_{i+1}\mathbf{P} = \mathbf{coNP}^{\Sigma_i\mathbf{P}}$