Les mots sturmiens

Florent Urrutia

January 4, 2011

Facteurs

Définition

L'ensemble des *facteurs* de longueur n de x est noté $F_n(x)$.

Fonction de complexité

Définition

On définit la *fonction de complexité* de x pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$P(x, n) = Card(F_n(x))$.

Propriétés

Théorème

- $P(x, \cdot)$ *est croissante*
- $P(x, n) \leq P(x, n + 1)$
- $P(x, n + m) \leq P(x, n)P(x, m)$

Complexité minimale

Théorème

Soit k le nombre de lettres apparaissant dans x. x est ultimement périodique si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N} \mid P(x, n) < n + k - 1$

Facteur spécial

Définition

On appelle *facteur spécial* d'un mot x tout facteur u tel que il existe $(a, b) \in A^2, a \neq b$, tels que ua et ub soient tous deux des facteurs de x. Un facteur qui n'est pas spécial est dit *conservatif*.

Mot Sturmien

Définition

On appelle *mot sturmien* les mots de complexité minimale parmi les mots qui ne sont pas ultimement périodiques. En d'autres termes, un mot x est sturmien si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, P(x, n) = n + 1$.

Remarque

Un mot est sturmien si et seulement s'il possède exactement un facteur spécial de chaque longueur.

Mot de Fibonacci

Exemple

Le *mot de Fibonacci*, défini comme étant la limite de la suite des mots (f_n) définie par $f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 01 & \text{si } n = 1 \\ f_{n-1}f_{n-2} \text{ sinon.} \end{cases}$

est sturmien.

Équilibre

Définition

On appelle *hauteur* d'un mot fini x et on note $h(x)$ le nombre de 1 apparaissant dans x.
On définit aussi, étant donné deux mots x et y de même longueur, $\delta(x, y) = |h(x) - h(y)|$.

Définition

Un ensemble de mots finis X est dit *équilibré* si $\forall (x, y) \in X^2 \mid |x| = |y|, \delta(x, y) \leq 1$.
Un mot x, fini ou infini, est dit *équilibré* si l'ensemble de ses facteurs l'est.

Première caractérisation des mots sturmiens

Théorème

Un mot infini x *est sturmien si et seulement s'il est équilibré et non ultimement périodique.*

Pente d'un mot fini

Définition

On définit la *pente* d'un mot fini non vide x comme $\pi(x) = h(x)/|x|$.

Pente d'un mot infini

Proposition

Soit x un mot équilibré infini. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, x_n le préfixe de longueur n de x. La suite $(\pi(x_n))$ est convergente.

Définition

Soit x un mot équilibré. On appelle *pente* de x la valeur *lim* $\pi(x_n)$, où x_n est le préfixe de longueur n de x.

Rationalité de la pente

Proposition

La pente d'un mot équilibré est rationnelle si et seulement s'il est ultimement périodique.

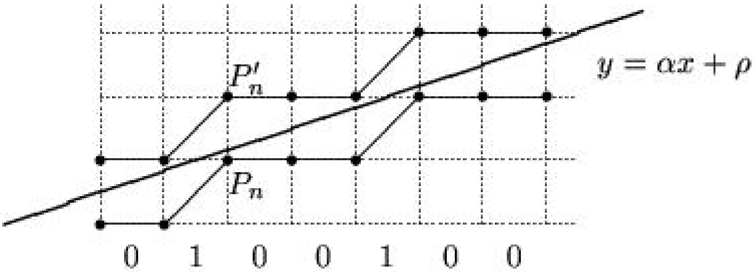
Mots mécaniques

Définition

Soient $\alpha \in]0,1[$ et $\rho \in \mathbb{R}$. On définit le *mot mécanique inférieur* $s_{\alpha,\rho}$ et le *mot mécanique supérieur* $s'_{\alpha,\rho}$, de *pente* α et d'*ordonnée à l'origine* ρ par

$s_{\alpha,\rho}(n) = \lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$
$s'_{\alpha,\rho}(n) = \lceil \alpha(n+1)+\rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil$

L'interprétation graphique se fait à l'aide du graphe suivant :

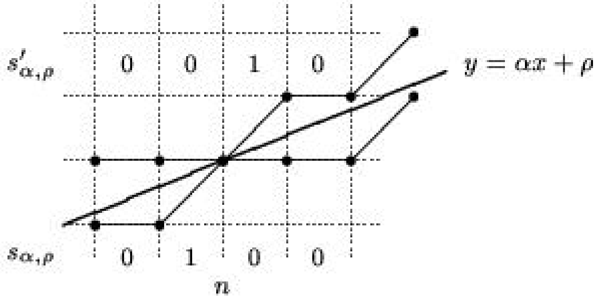


Pente & pente

Remarque

La pente d'un mot mécanique peut être reliée à la pente d'un mot équilibré.

Divergence



Mots caractéristiques

Définition

Dans le cas où $\rho = 0$ et $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a : $s_{\alpha,\rho}(0) = 0$, $s'_{\alpha,\rho}(0) = 1$, et α étant irrationnel, les deux mots mécaniques supérieurs et inférieurs coïncident pour $n > 0$. On a alors les écritures $s_{\alpha,\rho} = 0c_\alpha$ et $s'_{\alpha,\rho} = 1c_\alpha$. c_α est appelé *mot caractéristique* associé à α. Les mots caractéristiques permettent de définir une classe spéciale de mots mécaniques.

Seconde caractérisation des mots sturmiens

Théorème

Un mot s infini est sturmien si et seulement s'il est un mot mécanique de pente irrationnelle.

Facteur

Théorème

Un mot fini est facteur d'un mot sturmien si et seulement s'il est équilibré.

Facteurs et pentes

Proposition

- *Deux mots sturmiens de même pente ont même ensemble de facteurs.*
- *Deux mots sturmiens de pente différente ont un nombre fini de facteurs en communs.*

Retournement

Proposition

L'ensemble des facteurs d'un mot sturmien est clos par retournement.

Mots sturmiens & caractéristiques

Proposition

Si s *est un mot sturmien, alors* $0s$ *ou* $1s$ *est un mot sturmien. De plus, un mot sturmien est caractéristique si et seulement si* $0s$ *et* $1s$ *sont tous les deux sturmiens.*