

Les mots sturmiens

Florent Urrutia

4 février 2011

Table des matières

1	Introduction	2
2	Définition	2
2.1	Complexité	2
2.2	Mots sturmiens	3
3	Autres caractérisations	3
3.1	Équilibre	3
3.2	Mots mécaniques	6

1 Introduction

Les mots sturmiens sont des mots que l'on peut définir de plusieurs façons différentes. Leur étude relie plusieurs domaines des mathématiques, parmi lesquels l'arithmétique et la combinatoire. Ils apparaissent aussi de manière surprenante en science physique, par l'intermédiaire du mot de Fibonacci, qui est lui même un mot sturmien.

2 Définition

2.1 Complexité

Soit x un mot infini sur un alphabet fini A .

Définition 2.1. L'ensemble des *facteurs* de longueur n de x est noté $F_n(x)$.

Définition 2.2. On définit la *fonction de complexité* de x pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $P(x, n) = \text{Card}(F_n(x))$.

On a les propriétés de base suivantes :

Proposition 2.3.

- $P(x, \cdot)$ est croissante
- $P(x, n) \leq P(x, n + 1)$
- $P(x, n + m) \leq P(x, n)P(x, m)$

Le théorème suivant minore la complexité d'un mot qui n'est pas ultimement périodique :

Théorème 2.4. Soit k le nombre de lettres apparaissant dans x . x est ultimement périodique si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N} | P(x, n) < n + k - 1$

Démonstration. Supposons x ultimement périodique, i.e. $x = yz \dots z \dots z \dots$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(x, n) \leq |yz|$, et $P(x, \cdot)$ est bornée, d'où la première implication.

Supposons maintenant $\exists n \in \mathbb{N} | P(x, n) < n + k - 1$. On a alors le

Lemme 2.5. Sous cette hypothèse, $\exists m \in \mathbb{N} | P(x, m) = P(x, m + 1)$.

Démonstration. Supposons $\forall m \in \{1, \dots, n\}, P(x, m - 1) < P(x, m)$. Alors $P(x, n) \geq P(x, n - 1) + 1 \geq P(x, n - 2) + 2 \geq \dots \geq n - 1 + P(x, 1) = n - 1 + k$, ce qui n'est pas.

Ainsi, à chaque facteur de longueur m correspond exactement un facteur de longueur $m + 1$. Notons $x = x_0x_1 \dots$, les x_i étant des lettres. D'après la remarque qui précède, étant donné un sous-mot de x de longueur m $x_j \dots x_{j+m-1}$, on connaît x_{j+m} . En conséquence, dès lors qu'un facteur de longueur m apparaît deux fois dans x (ce qui arrive), disons $x_j \dots x_{j+m-1} = x_{j+l} \dots x_{j+l+m-1}$, alors $x_{j+m} = x_{j+l+m}$, et $x_{j+1} \dots x_{j+m} = x_{j+l+1} \dots x_{j+l+m}$ d'où $x_{j+m+1} = x_{j+l+m+1}$ et ainsi de suite : x est ultimement périodique, de période l .

On passe maintenant à une proposition qui se révélera utile par la suite.

Définition 2.6. On appelle *facteur spécial* d'un mot x tout facteur u tel que il existe $(a, b) \in A^2, a \neq b$, tels que ua et ub soient tous deux des facteurs de x . Un facteur qui n'est pas spécial est dit *conservatif*.

Proposition 2.7. Soit x un mot infini, $n \in \mathbb{N}^*$, et c le nombre de facteurs conservatifs de longueur n de x . Si il existe un facteur de longueur $n + c$ de x dont tous les facteurs de longueur n sont conservatifs, alors x est ultimement périodique.

Démonstration. Soit $w = a_1 a_2 \dots a_{n+c}$ un facteur de x de longueur $n + c$ dont tous les facteurs de longueur n sont conservatifs. Pour $i \in \{0, \dots, c\}$, notons $p_i = a_i \dots a_{i+n-1}$, famille de $c + 1$ facteurs conservatifs. Comme x ne contient que c facteurs conservatifs, $\exists j \in \{0, \dots, c-1\} \mid p_j = p_c$. Après chaque occurrence de p_i dans x ne peut suivre qu'une lettre, que l'on note P_i . Alors, après une occurrence de p_j dans x apparaît P_j , et il y a donc une occurrence de p_{j+1} , qui est donc suivie de P_{j+1} , et ainsi de suite jusqu'à l'apparition de p_c , suivie par $P_c = P_j$, et le facteur $P_j \dots P_{c-1}$ se répète indéfiniment : x est ultimement périodique.

2.2 Mots sturmiens

Dans toute la suite, on ne considérera que des mots binaires sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$.

Définition 2.8. On appelle *mot sturmien* les mots de complexité minimale parmi les mots qui ne sont pas ultimement périodiques. En d'autres termes, un mot x est sturmien si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, P(x, n) = n + 1$.

Remarque 2.9. Un mot est sturmien si et seulement s'il possède exactement un facteur spécial de chaque longueur.

Exemple 2.10. Le mot de Fibonacci, défini comme étant la limite de la suite des mots (f_n) définie par $f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 01 & \text{si } n = 1 \text{ est sturmien. La preuve est laborieuse.} \\ f_{n-1}f_{n-2} & \text{sinon.} \end{cases}$

3 Autres caractérisations

3.1 Équilibre

Définition 3.1. On appelle *hauteur* d'un mot fini x et on note $h(x)$ le nombre de 1 apparaissant dans x .

On définit aussi, étant donné deux mots x et y de même longueur, $\delta(x, y) = |h(x) - h(y)|$.

Définition 3.2. Un ensemble de mots finis X est dit *équilibré* si

$$\forall (x, y) \in X^2 \mid |x| = |y|, \delta(x, y) \leq 1.$$

Un mot x , fini ou infini, est dit *équilibré* si l'ensemble de ses facteurs l'est.

Proposition 3.3. Soit X l'ensemble des facteurs d'un mot équilibré. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{Card}(X \cap A^n) \leq n + 1.$$

Démonstration. La vérification pour les cas $n = 0$ et $n = 1$ est immédiate. X étant équilibré, il ne peut contenir à la fois 00 et 11, et le résultat est donc acquis pour $n = 2$.

Raisonnons par l'absurde. Soit $n = \min\{k \in \mathbb{N}, \text{Card}(X \cap A^k) > k + 1\}$. Notons $Y = X \cap A^{n-1}$ et $Z = X \cap A^n$. D'une part, on a, par définition de n , $\text{Card}(Y) \leq n$ et $\text{Card}(Z) \geq n + 2$. D'autre part, pour tout $z \in Z$, son suffixe de longueur $n - 1$ est dans Y . On en déduit : $\exists (y, y') \in Y^2 \mid y \neq y' \ \& \ \{0y, 1y, 0y', 1y'\} \subset Z$ (car ≥ 2). Soit x le plus long préfixe commun à y et y' (x est éventuellement vide). Comme $y \neq y'$, on peut par exemple supposer que $x0$ est préfixe de y et $x1$ préfixe de y' (car $n > 2$). Mais alors, $0x0 \in X$ et $1x1 \in X$, et X n'est pas équilibré.

Proposition 3.4. *Soit X l'ensemble des facteurs d'un mot non équilibré. Il existe un palindrome w tel que $0w0$ et $1w1$ soient dans X .*

Démonstration. Soient u et v deux mots de même longueur minimale tels que $\delta(u, v) = 2$. Les premières lettres de u et v sont donc différentes, et il en est de même pour les dernières lettres. Supposons par exemple que u débute par un 0 et v par un 1. On dispose de factorisations $u = 0wau'$ et $v = 1wbv'$ avec a et b deux lettres différentes. Remarquons que $a = 0$ et $b = 1$ car sinon $\delta(u', v') = \delta(u, v)$ ce qui contredirait la minimalité de la longueur de u et v . Par suite, on a, toujours par minimalité, $u = 0w0$ et $v = 1w1$.

Supposons que w ne soit pas un palindrome. On note à l'aide d'un $\tilde{}$ le renversement d'un mot. Alors il existe un préfixe z de w et une lettre a tels que za est un préfixe de w , \tilde{z} est un suffixe de w , mais $a\tilde{z}$ n'est pas un suffixe de w . Supposons par exemple $a = 1$. Alors $0\tilde{z}$ est un suffixe de w . On a alors $1z1$ préfixe propre de v et $0\tilde{z}0$ suffixe propre de u , et $\delta(1z1, 0\tilde{z}0) = 2$, contredisant la minimalité de la longueur de u et v .

Nous pouvons maintenant exprimer le caractère sturmien en tant que mots équilibrés :

Théorème 3.5. *Un mot infini x est sturmien si et seulement s'il est équilibré et non ultimement périodique.*

Démonstration. Si x est équilibré, la proposition 3.3 montre que $\forall n \in \mathbb{N}, P(x, n) \leq n + 1$. Si de plus x n'est pas ultimement périodique, alors d'après le théorème 2.4, $\forall n \in \mathbb{N}, P(x, n) \geq n + 1$, et au final $\forall n \in \mathbb{N}, P(x, n) = n + 1$: x est sturmien.

Supposons maintenant x sturmien et non équilibré, et montrons qu'il est ultimement périodique. D'après la proposition 3.4, il existe un palindrome w tel que $0w0$ et $1w1$ soient des facteurs de x . w est donc un facteur spécial. Soit $n = |w| + 1$. Comme x est sturmien, il a un unique facteur spécial de longueur n . Notons que le suffixe de longueur $n - 1$ de ce facteur est un facteur spécial : x étant sturmien, ce ne peut être que w ; ainsi, l'unique facteur spécial de longueur n de x est soit $0w$, soit $1w$. Supposons par exemple que $0w$ soit un facteur spécial. Alors $1w$ ne l'est pas, et $0w1$ est un facteur de x , alors que $1w0$ n'est pas un facteur de x . Toute occurrence de $1w$ dans x est nécessairement suivi de 1. $1w1$ étant un facteur de x , on peut considérer un facteur u de x de longueur $2n$ qui s'écrit $u = 1w1v$, avec v de longueur $n - 1$. Montrons qu'aucun des facteurs de longueur n de u n'est facteur spécial de x , ce qui permettra de conclure grâce à la proposition 2.7 (en effet, x , en tant que mot sturmien, a $n + 1$ facteurs de longueur n , dont n sont conservatifs). Pour cela, il suffit de montrer que $0w$ n'est pas dans u (puisque $0w$ est le seul facteur spécial de longueur n de x). Supposons le contraire. On obtient alors les découpages suivants :

u							
1	w			1	v		
		0	w				
1	s	0	t	1	y	z	

Comme w est un palindrome, on a $w = \tilde{t}0\tilde{s}$, et cela est impossible compte tenu de la factorisation $w = t1y$.

Profitons-en pour préciser quelques point utiles pour la suite.

Définition 3.6. On définit la *pente* d'un mot fini non vide x comme $\pi(x) = h(x)/|x|$.

Nous allons maintenant définir la pente d'un mot infini, sous la condition qu'il soit équilibré.

Proposition 3.7. Soit X l'ensemble des facteurs d'un mot équilibré.

$\forall (x, y) \in (X \setminus \{\epsilon\})^2, |\pi(x) - \pi(y)| < 1/|x| + 1/|y|$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour u et v deux mots quelconques,

$$\pi(uv) = \frac{|u|}{|uv|}\pi(u) + \frac{|v|}{|uv|}\pi(v)$$

Pour $|x| + |y| = 2$, le résultat est clair.

On raisonne ensuite par récurrence sur $|x| + |y|$. Si $|x| = |y|$, le résultat est clair et on peut donc supposer $|x| > |y|$. On écrit alors $x = zt$ avec $|z| = |y|$. Par hypothèse de récurrence, $|\pi(t) - \pi(y)| < 1/|t| + 1/|y|$. Comme X est équilibré, $|h(z) - h(y)| \leq 1$ d'où $|\pi(z) - \pi(y)| \leq 1/|z|$. Alors,

$$\begin{aligned} \pi(x) - \pi(y) &= \frac{|z|}{|x|}\pi(z) + \frac{|t|}{|x|}\pi(t) - \pi(y) \\ &= \frac{|z|}{|x|}(\pi(z) - \pi(y)) + \frac{|t|}{|x|}(\pi(t) - \pi(y)) \end{aligned}$$

et $|\pi(x) - \pi(y)| < 1/|x| + \frac{|t|}{|x|}(1/|y| + 1/|t|)$. Enfin, $1 = \frac{|t| + |y|}{|x|} = \frac{|t|}{|x|} + \frac{|y|}{|x|} = \frac{|t|}{|x|}(1 + \frac{|y|}{|t|})$ d'où $\frac{|t|}{|x|}(1/|y| + 1/|t|) = 1/|y|$, et $|\pi(x) - \pi(y)| < 1/|x| + 1/|y|$.

Le corollaire suivant est le dernier pas à faire pour définir la pente d'un mot infini :

Corollaire 3.8. Soit x un mot équilibré infini. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, x_n le préfixe de longueur n de x . La suite $(\pi(x_n))$ est convergente.

Démonstration. La proposition précédente montre que la suite $(\pi(x_n))$ est de Cauchy.

Définition 3.9. Soit x un mot équilibré. On appelle *pente* de x la valeur $\lim \pi(x_n)$, où x_n est le préfixe de longueur n de x .

Proposition 3.10. Soit x un mot équilibré de pente α . Pour tout facteur u non vide de x , $|\pi(u) - \alpha| \leq 1/|u|$. De plus, l'une des propositions suivantes est vérifiée pour tout facteur u :

$$\forall u, \alpha|u| - 1 < h(u) \leq \alpha|u| + 1$$

ou

$$\forall u, \alpha|u| - 1 \leq h(u) < \alpha|u| + 1$$

Démonstration. Soit x_n le préfixe de longueur n de x .

$\forall n \in \mathbb{N}^*, |\pi(u) - \alpha| \leq |\pi(u) - \pi(x_n)| + |\pi(x_n) - \alpha| < 1/|u| + 1/n + |\pi(x_n) - \alpha|$. On en déduit par passage à la limite que $|\pi(u) - \alpha| \leq 1/n$.

De plus, si jamais il existait deux facteurs u et v de x tels que $\alpha|u| - 1 = h(u)$ & $\alpha|v| + 1 = h(v)$, on aurait alors $|\pi(u) - \pi(v)| = 1/|u| + 1/|v|$, absurde d'après la proposition 3.7, ce qui montre donc la deuxième partie de la proposition.

Proposition 3.11. La pente d'un mot équilibré est rationnelle si et seulement si il est ultimement périodique.

Démonstration. Soit s un mot équilibré ultimement périodique, notons le $s = xy \dots y \dots$. Alors,

$$\pi(xy^n) = \frac{h(x) + nh(y)}{|x| + n|y|} \sim \frac{nh(y)}{n|y|} = \pi(y) \in \mathbb{Q}$$

Soit s un mot équilibré de pente $\alpha \in \mathbb{Q}$. $\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid \alpha = p/q$ & $p \wedge q = 1$. Compte tenu de

la propriété 3.10, l'une des inégalités suivantes est valable pour tout facteur u :

$$\alpha|u| - 1 < h(u) \leq \alpha|u| + 1 \quad (*)$$

ou

$$\alpha|u| - 1 \leq h(u) < \alpha|u| + 1$$

Supposons par exemple que l'on soit dans le cas (*). Alors, tout facteur de s de longueur q est de hauteur p ou $p+1$. Il n'y a qu'un nombre fini d'occurrences de facteurs de longueur q et de hauteur $p+1$. En effet, dans le cas contraire, il existerait deux occurrences de tels facteurs disjointes, c'est à dire un facteur de x de la forme uzv avec u,v de tels facteurs. Alors d'après (*)

$$h(uzv) \leq 1 + \alpha(q + |z| + q) = 1 + 2p + \alpha|z|$$

Or, $h(uzv) = h(u) + h(z) + h(v) = 2 + 2p + h(z)$ d'où $h(z) \leq \alpha|z| - 1$, contredisant (*). Ainsi, de tels facteurs étant en nombres finis, on peut écrire $x = ty$ avec tout facteur de longueur q de y de hauteur p . Montrons maintenant que y est de période q . Pour cela, montrons que la première et la dernière lettre d'un facteur de longueur $q+1$ de y sont identiques. Un facteur de longueur $q+1$ est de la forme azb avec a,b deux lettres. Comme $h(az) = p = h(zb)$ puisque az et zb sont des facteurs de y de longueur q , $a = b$, ce qui termine la démonstration.

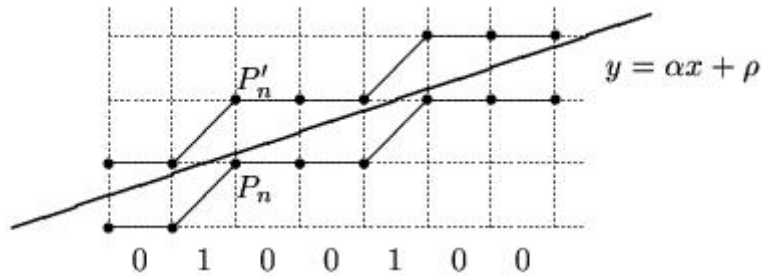
3.2 Mots mécaniques

Définition 3.12. Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $\rho \in \mathbb{R}$. On définit le mot mécanique inférieur $s_{\alpha,\rho}$ et le mot mécanique supérieur $s'_{\alpha,\rho}$, de pente α et d'ordonnée à l'origine ρ par

$$s_{\alpha,\rho}(n) = \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$$

$$s'_{\alpha,\rho}(n) = \lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil$$

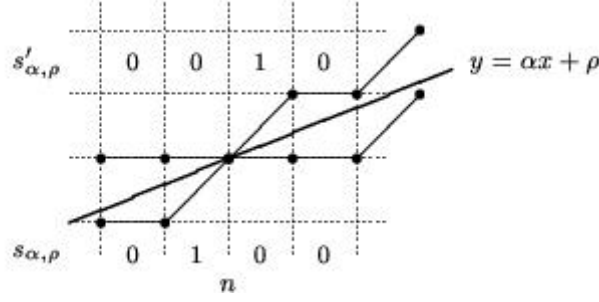
L'interprétation graphique se fait à l'aide du graphe suivant :



Remarque 3.13. On verra plus loin que la pente d'un mot mécanique peut être reliée à la pente d'un mot équilibré.

Notons que si $\alpha n + p \notin \mathbb{N}$, alors $1 + \lfloor \alpha n + \rho \rfloor = \lceil \alpha n + \rho \rceil$. Par suite, si $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha n + p \notin \mathbb{N}$, alors $s_{\alpha,\rho} = s'_{\alpha,\rho}$. En revanche, dans le cas où $\alpha n + p \in \mathbb{N}$, $s_{\alpha,\rho}(n) = 0$ & $s'_{\alpha,\rho}(n) = 1$, et si de plus $n > 0$, $s_{\alpha,\rho}(n-1) = 1$ & $s'_{\alpha,\rho}(n-1) = 0$.

On peut visualiser ceci sur le graphe ci-dessous :



Ainsi, si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, la droite d'équation $y = \alpha x + \rho$ ne peut passer que par un seul point de coordonnées entières, et donc les deux mots $s_{\alpha, \rho}$ et $s'_{\alpha, \rho}$ ne peuvent différer qu'au plus d'un facteur de longueur 2 (si le point de coordonnée entière n'est pas d'abscisse 0) ou de longueur 1 (dans le cas $\rho \in \mathbb{N}$).

Remarque 3.14. Si $\rho \in \mathbb{N}$, alors on peut supposer $\rho = 0$, cela ne changeant pas les mots mécaniques associés.

Définition 3.15. Dans le cas où $\rho = 0$ et $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a d'après les paragraphes précédents : $s_{\alpha, \rho}(0) = 0$, $s'_{\alpha, \rho}(0) = 1$, et α étant irrationnel, les deux mots mécaniques supérieurs et inférieurs coïncident pour $n > 0$. On a alors les écritures $s_{\alpha, \rho} = 0c_\alpha$ et $s'_{\alpha, \rho} = 1c_\alpha$. c_α est appelé *mot caractéristique* associé à α . Les mots caractéristiques permettent de définir une classe spéciale de mots mécaniques.

On peut maintenant caractériser les mots sturmiens de la façon suivante :

Théorème 3.16. *Un mot s infini est sturmien si et seulement s'il est un mot mécanique de pente irrationnelle.*

Démonstration. Commençons tout d'abord par remarquer la formule suivante :

$$x' - x - 1 < [x'] - [x] < x' - x + 1$$

Soit s un mot mécanique inférieur de pente $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et d'ordonnée à l'origine ρ . La hauteur d'un facteur $u = s(n) \dots s(n+p-1)$ de longueur p est

$$\begin{aligned} h(u) &= ([\alpha(n+p) + \rho] - [\alpha(n+p-1) + \rho]) + \dots + ([\alpha(n+1) + \rho] - [\alpha n + \rho]) \\ &= [\alpha(n+p) + \rho] - [\alpha n + \rho] \end{aligned}$$

Donc, $\alpha|u| - 1 < h(u) < \alpha|u| + 1$, puis $[\alpha|u|] \leq h(u) \leq [\alpha|u|] + 1$. Ainsi, pour une longueur de facteur donné $|u|$, $h(u)$ ne peut prendre que les deux valeurs consécutives $[\alpha|u|]$ et $[\alpha|u|] + 1$, et donc x est équilibré. De plus, pour u préfixe de s , il est graphiquement clair que $|h(u) - \alpha|u|| \leq 1$, d'où $|\pi(u) - \alpha| \leq 1/|u|$. Ainsi, la pente de x en tant que mot équilibré, que l'on avait défini comme la limite de $\pi(u)$, est α . La proposition 3.11 affirme alors que s n'est pas ultimement périodique. s est équilibré et non ultimement périodique. Par le théorème 3.5, il est sturmien. La preuve est similaire pour un mot mécanique supérieur.

Réciproquement, soit s un mot sturmien, donc un mot équilibré non ultimement périodique par le théorème 3.5. On peut donc considérer sa pente en tant que mot équilibré, notée α . Notons h_n la longueur du préfixe de longueur n de x .

Soit $t \in \mathbb{R}$. Supposons

$\exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}^*, h_n < [\alpha n + t] \ \& \ h_{n+k} > [\alpha(n+k) + t]$. Alors

$$\begin{aligned}
h_{n+k} - h_n &\geq (\lfloor \alpha(n+k) + t \rfloor + 1) - (\lfloor \alpha n + t \rfloor - 1) \\
&\geq 2 + \lfloor \alpha(n+k) + t \rfloor - \lfloor \alpha n + t \rfloor \\
&> 1 + (\alpha(n+k) + t - (\alpha n + t)) \\
&> 1 + \alpha k
\end{aligned}$$

Ceci contredit la proposition 3.10 (pourquoi?) On obtient aussi une absurdité dans le second cas. Il en est de même en supposant

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}^*, h_n > \lfloor \alpha n + t \rfloor \ \& \ h_{n+k} < \lfloor \alpha(n+k) + t \rfloor$$

Ainsi, on a $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \leq \lfloor \alpha n + t \rfloor$ ou $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \geq \lfloor \alpha n + t \rfloor$, et ce pour tout t .

Posons $\rho = \inf \{t \mid \forall n \in \mathbb{N}, h_n \leq \lfloor \alpha n + t \rfloor\}$. Grâce aux deux inégalités proposées par la proposition 3.10, on a $\rho \leq 1$. Notons que $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \leq \alpha n + \rho \leq h_n + 1$ (•) : dans le cas contraire, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid h_{n_0} + 1 < \alpha n_0 + \rho$ et en posant $\rho' = h_{n_0} + 1 - \alpha n_0 < \rho$ vérifiant $\alpha n_0 + \rho' = h_{n_0} + 1 > h_{n_0}$, on a d'après le paragraphe précédent $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \leq \lfloor \alpha n + \rho' \rfloor$, ce qui contredit donc la définition de ρ .

Par la proposition 3.11, α est irrationnel, et donc $\alpha n + \rho$ ne peut être entier que pour un seul n . Donc d'après (•) :

-Si $\alpha n + \rho$ n'est jamais entier, alors $\forall n \in \mathbb{N}, h_n = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ et donc $s = s_{\alpha, \rho}$.

-Si $\exists! n_0 \mid \alpha n_0 + \rho \in \mathbb{N}$, alors soit $h_{n_0} = \alpha n_0 + \rho$ et on a comme dans le premier cas

$\forall n \in \mathbb{N}, h_n = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ et donc $s = s_{\alpha, \rho}$, soit $h_{n_0} + 1 = \alpha n_0 + \rho$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}, h_n = \alpha n + \rho$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, h_n = \lceil \alpha n + \rho - 1 \rceil$, d'où $s = s'_{\alpha, \rho-1}$.

Références

- [1] M. Lothaire : *Algebraic Combinatorics On Words*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 2002.

Mes remerciements à Jean-Paul Allouche pour m'avoir reçu.