Modèle de Blum, Shub et Smale

Problèmes de complexité

Guilhem Gamard

Janvier 2011

1 Définition du modèle réel

Machine selon Blum, Shub, Smale

Analogue à une machine de Turing avec $\Gamma = \mathbb{R}$.

- Ensemble fini d'états,

Machine selon Blum, Shub, Smale

Analogue à une machine de Turing avec $\Gamma = \mathbb{R}$.

- Ensemble fini d'états,
- états acceptants,

Machine selon Blum, Shub, Smale

Analogue à une machine de Turing avec $\Gamma = \mathbb{R}$.

- Ensemble fini d'états,
- états acceptants,
- bande de travail,

Machine selon Blum, Shub, Smale

Analogue à une machine de Turing avec $\Gamma = \mathbb{R}$.

- Ensemble fini d'états,
- états acceptants,
- bande de travail,
- fonction de transitions,

Machine selon Blum, Shub, Smale

Analogue à une machine de Turing avec $\Gamma = \mathbb{R}$.

- Ensemble fini d'états,
- états acceptants,
- bande de travail,
- fonction de transitions,
- opérations légales.

Opérations légales

- Les opérations légales définissent le type de calculs que sait effectuer de la machine.

Opérations légales

- Les opérations légales définissent le type de calculs que sait effectuer de la machine.
- Elles sont nécessairement binaires et fonctionnent sur deux cases consécutives.

Opérations légales

- Les opérations légales définissent le type de calculs que sait effectuer de la machine.
- Elles sont nécessairement binaires et fonctionnent sur deux cases consécutives.
- Des tests comme $<$, $=$ sont envisageables.

Cohérence du modèle

- Le fait que $\Gamma = \mathbb{R}$ peut choquer.

Cohérence du modèle

- Le fait que $\Gamma = \mathbb{R}$ peut choquer.
- Les restrictions sur les opérations légales conduisent à une classe de fonctions calculables raisonnable.

Cohérence du modèle

- Le fait que $\Gamma = \mathbb{R}$ peut choquer.
- Les restrictions sur les opérations légales conduisent à une classe de fonctions calculables raisonnable.
- Cette classe de fonctions dépend des opérations légales choisies !

Intérêt de l'approche réelle

- Analyser des algorithmes travaillant sur des réels sans approximations,

Intérêt de l'approche réelle

- Analyser des algorithmes travaillant sur des réels sans approximations,
- utiliser des outils d'analyse et d'algèbre dans des questions de complexité,

Intérêt de l'approche réelle

- Analyser des algorithmes travaillant sur des réels sans approximations,
- utiliser des outils d'analyse et d'algèbre dans des questions de complexité,
- $\Rightarrow$ nouvel angle d'attaque pour $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$!

Classes de complexité

- L, P et EXP se définissent sans surprises.

Classes de complexité

- L, P et EXP se définissent sans surprises.
- Les classes de complexité spatiales sont toutes équivalentes.

Classes de complexité

- L, P et EXP se définissent sans surprises.
- Les classes de complexité spatiales sont toutes équivalentes.
- Complexité temporelle non-déterministe : caractérisation existentielle.

Classes de complexité

- L, P et EXP se définissent sans surprises.
- Les classes de complexité spatiales sont toutes équivalentes.
- Complexité temporelle non-déterministe : caractérisation existentielle.
- A est dans NP si et seulement si

$$\exists B \in P, a \in A \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} < c, a > \in B$$

Équivalence avec P=NP

- On se donne les opérations légales $+- =<$ et aucune constante.

Équivalence avec P=NP

- On se donne les opérations légales $+- =<$ et aucune constante.
- Modèle $\mathbb{R}^0_{ovs}$.

Équivalence avec P=NP

- On se donne les opérations légales $+- =<$ et aucune constante.
- Modèle $\mathbb{R}^0_{ovs}$.
- $\mathrm{P} = \mathrm{NP} \Leftrightarrow \mathrm{P}^0_{\mathbb{R}ovs} = \mathrm{NP}^0_{\mathbb{R}ovs}$.

Équivalence avec P=NP

- On se donne les opérations légales $+- =<$ et aucune constante.
- Modèle $\mathbb{R}^0_{ovs}$.
- $\mathrm{P} = \mathrm{NP} \Leftrightarrow \mathrm{P}^0_{\mathbb{R}ovs} = \mathrm{NP}^0_{\mathbb{R}ovs}$.
- On peut utiliser le modèle BSS pour tenter de montrer P=NP.

Équivalence avec P=NP

- On se donne les opérations légales $+- =<$ et aucune constante.
- Modèle $\mathbb{R}^0_{ovs}$.
- $\mathrm{P} = \mathrm{NP} \Leftrightarrow \mathrm{P}^0_{\mathbb{R}ovs} = \mathrm{NP}^0_{\mathbb{R}ovs}$.
- On peut utiliser le modèle BSS pour tenter de montrer P=NP.
- Ce sera tout aussi difficile que dans le modèle de Turing.

Ébauche de preuve (sens facile)

$\mathrm{P}^0_{\mathbb{R}ovs} = \mathrm{NP}^0_{\mathbb{R}ovs} \Rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}.$

- Il s'agit de restreindre les machines $\mathbb{R}^0_{ovs}$ à l'alphabet $\{0, 1\}$.

Ébauche de preuve (sens facile)

$\mathrm{P}^0_{\mathbb{R}ovs} = \mathrm{NP}^0_{\mathbb{R}ovs} \Rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}.$

- Il s'agit de restreindre les machines $\mathbb{R}^0_{ovs}$ à l'alphabet $\{0, 1\}$.
- On vérifie que cette restriction est équivalente aux machines de Turing.

Ébauche de preuve (sens facile)

$\mathrm{P}^0_{\mathbb{R}ovs} = \mathrm{NP}^0_{\mathbb{R}ovs} \Rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}.$

- Il s'agit de restreindre les machines $\mathbb{R}^0_{ovs}$ à l'alphabet $\{0, 1\}$.
- On vérifie que cette restriction est équivalente aux machines de Turing.
- On conclut par le fait qu'il exite une machine de Turing universelle dont l'alphabet est $\{0, 1\}$.

Ébauche de preuve (sens difficile)

$\mathrm{P}^0_{\mathbb{R}ovs} = \mathrm{NP}^0_{\mathbb{R}ovs} \Leftarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}.$

- Le résultat d'une machine BSS ne dépend que des tests qu'elle fait.

Ébauche de preuve (sens difficile)

$\mathrm{P}^0_{\mathbb{R}ovs} = \mathrm{NP}^0_{\mathbb{R}ovs} \Leftarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}.$

- Le résultat d'une machine BSS ne dépend que des tests qu'elle fait.
- Ces tests ne font intervenir que les combinaisons linéaires de réels de l'entrée. Ils définissent des demi-espaces.

Ébauche de preuve (sens difficile)

$$\mathrm{P}^0_{\mathbb{R}ovs} = \mathrm{NP}^0_{\mathbb{R}ovs} \Leftarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}.$$

- Le résultat d'une machine BSS ne dépend que des tests qu'elle fait.
- Ces tests ne font intervenir que les combinaisons linéaires de réels de l'entrée. Ils définissent des demi-espaces.
- On peut découper l'espace des entrées en cellules sur lesquelles la machine se comporte de façon identique.

Ébauche de preuve (sens difficile)

$\mathrm{P}^0_{\mathbb{R}ovs} = \mathrm{NP}^0_{\mathbb{R}ovs} \Leftarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}.$

- Le résultat d'une machine BSS ne dépend que des tests qu'elle fait.
- Ces tests ne font intervenir que les combinaisons linéaires de réels de l'entrée. Ils définissent des demi-espaces.
- On peut découper l'espace des entrées en cellules sur lesquelles la machine se comporte de façon identique.
- A l'aide de P=NP, on localise la cellule dans laquelle se trouve l'entrée et on conclut.

Quelques alternatives...

- Modèle de Valiant (1979).