Automates sur les mots infinis

Guillaume Roux

janvier 2010

Sommaire

Sommaire

Mots infinis et langages

Définition (Mots infinis)

On note A^ω l'ensemble des mots infinis sur A. On définit également $A^\infty = A^* \cup A^\infty$ l'ensemble des mots sur A, finis ou infinis.

Mots infinis et langages

Définition (Mots infinis)

On note A^ω l'ensemble des mots infinis sur A. On définit également $A^\infty = A^* \cup A^\infty$ l'ensemble des mots sur A, finis ou infinis.

Définition (Itération infinie)

Soit $X \subseteq A^*$. On définit :

$$X^\omega = \{x_0 x_1 \dots \mid \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in X \setminus \{\varepsilon\}\}$$

et

$$X^\infty = X^* \cup X^\omega.$$

Langages ω-rationnels

Définition (Langages ω-rationnels)

La classe des langages ω-rationnels de A^∞ est la plus petite classe $\mathcal{R}$ de parties de A^∞ vérifiant :

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$, et $\forall a \in A, \{a\} \in \mathcal{R}$,
2. $\mathcal{R}$ est close par réunion finie,
3. $\forall X \in A^* \cap \mathcal{R}, \forall Y \in A^\infty \cap \mathcal{R}, XY \in \mathcal{R}$,
4. $\forall X \in A^* \cap \mathcal{R}, X^* \in \mathcal{R}$ et $X^\infty \in \mathcal{R}$.

On note $\mathcal{R}at(A^\omega)$ l'ensemble des langages ω-rationnels de A^∞ inclus dans A^ω.

Présentation

Définition (Acceptation par un automate de Büchi)

Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ un automate de Büchi.

- Un chemin infini dans $\mathcal{A}$ est dit *acceptant* si son état de départ est initial et s'il passe infiniment souvent par des états finaux.
- Un mot (infini) est dit *accepté* par $\mathcal{A}$ s'il est l'étiquette d'un chemin infini acceptant. On note $L^\omega(\mathcal{A})$ l'ensemble des mots infinis acceptés par $\mathcal{A}$.
- Une partie X de A^ω est dite *reconnaissable* s'il existe un automate de Büchi fini $\mathcal{A}$ tel que $X = L^\omega(\mathcal{A})$.

Un exemple

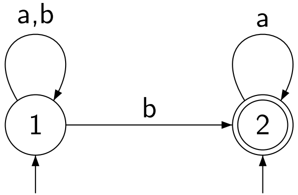


FIGURE: Un automate de Büchi non déterministe.

$$L^\omega(\mathcal{A}) = (a+b)^* a^\omega.$$

Sommaire

Équivalent du théorème de Kleene

Lemme

Un langage de A^ω est ω-rationnel si et seulement si il s'écrit comme une réunion finie de langages de la forme XY^ω, où X et Y sont des langages rationnels de A^*.

Théorème

Une partie de A^ω est reconnaissable si et seulement si elle est ω-rationnelle.

Équivalent du théorème de Kleene

Lemme

Un langage de A^ω est ω-rationnel si et seulement si il s'écrit comme une réunion finie de langages de la forme XY^ω, où X et Y sont des langages rationnels de A^*.

Théorème

Une partie de A^ω est reconnaissable si et seulement si elle est ω-rationnelle.

Démonstration

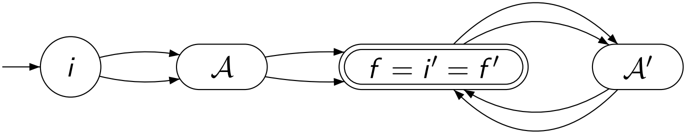


FIGURE: Un automate reconnaissant $X(Y)^\omega$.

Énoncé

Lemme (Factorisation Ramseyenne)

Soit $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{N}) \to C$, où C est un ensemble fini et $\mathcal{P}_2(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties à 2 éléments de $\mathbb{N}$.
Il existe une partie infinie E de $\mathbb{N}$ telle que $f(\mathcal{P}_2(E))$ soit un singleton.

Théorème (Büchi)

La classe des langages reconnaissables est close par réunion, intersection et complémentation.

Énoncé

Lemme (Factorisation Ramseyenne)

Soit $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{N}) \to C$, où C est un ensemble fini et $\mathcal{P}_2(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties à 2 éléments de $\mathbb{N}$.
Il existe une partie infinie E de $\mathbb{N}$ telle que $f(\mathcal{P}_2(E))$ soit un singleton.

Théorème (Büchi)

La classe des langages reconnaissables est close par réunion, intersection et complémentation.

Factorisation Ramseyenne

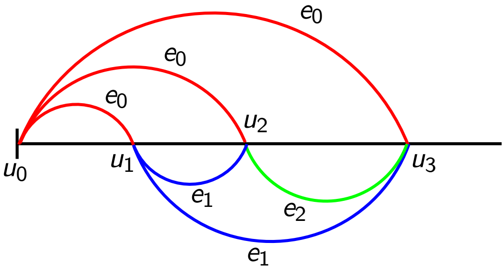


FIGURE: La suite des indices.

Sommaire

Caractérisation

Définition

Étant donné $L \subseteq A^*$, on définit :

$$\overrightarrow{L} = \{u \in A^\omega \mid \text{u a une infinité de préfixes dans } L\}$$

Caractérisation

Définition

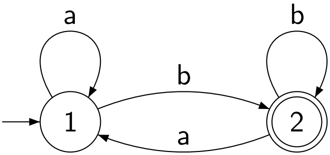
Étant donné $L \subseteq A^*$, on définit :

$$\overrightarrow{L} = \{u \in A^\omega \mid \text{u a une infinité de préfixes dans } L\}$$

Proposition

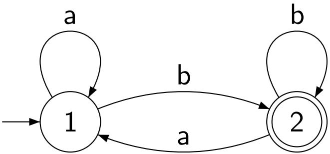
Une partie X de A^ω est reconnue par un automate de Büchi déterministe si et seulement si elle s'écrit $X = \overrightarrow{L}$, où L est une partie de A^+.

Explication et illustration



$L^{\omega}(\mathcal{A}) = (a^* b)^{\omega}$
$L^{+}(\mathcal{A}) = A^* b$

Explication et illustration



$$L^\omega(\mathcal{A}) = (a^*b)^\omega$$
$$L^+(\mathcal{A}) = A^*b$$

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L^+(\mathcal{A})}$$

Application

Le langage $(a+b)^*a^\omega$ ne peut être reconnu par un automate de Büchi déterministe.

Application

Le langage $(a+b)^* a^\omega$ ne peut être reconnu par un automate de Büchi déterministe.

Sinon : $L^\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L}$

Application

Le langage $(a+b)^*a^\omega$ ne peut être reconnu par un automate de Büchi déterministe.

Sinon : $L^\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L}$

$ba^\omega \longrightarrow ba^{n_1} \in L$

Application

Le langage $(a+b)^* a^\omega$ ne peut être reconnu par un automate de Büchi déterministe.

Sinon : $L^\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L}$
$ba^\omega \longrightarrow ba^{n_1} \in L$
$ba^{n_1} ba^\omega \longrightarrow ba^{n_1} ba^{n_2} \in L$ ...

Application

Le langage $(a+b)^* a^\omega$ ne peut être reconnu par un automate de Büchi déterministe.

Sinon : $L^\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L}$
$ba^\omega \longrightarrow ba^{n_1} \in L$
$ba^{n_1} ba^\omega \longrightarrow ba^{n_1} ba^{n_2} \in L$ ...

$\Longrightarrow ba^{n_1} ba^{n_2} ba^{n_3} \ldots \in \overrightarrow{L}$, absurde.

Définitions

Définition (Automate de Muller)

On appelle *automate de Muller* tout quintuplet $\mathcal{A} = (Q, A, E, i, \mathcal{T})$, où :

1. (Q, A, E) est un automate fini déterministe,
2. i est l'état initial,
3. $\mathcal{T}$ est un ensemble de parties de Q, appelé la *table* de l'automate.

Définitions

Définition (Acceptation par un automate de Muller)

Soit $\mathcal{A}$ un automate de Muller.

- Étant donné un chemin p dans l'automate, on note $\mathrm{Inf}(p)$ l'ensemble des états par lesquels ce chemin passe une infinité de fois.
- Un chemin infini dans $\mathcal{A}$ est dit *acceptant* si son état de départ est i et si $\mathrm{Inf}(p) \in \mathcal{T}$.
- Un mot (infini) est dit *accepté* par $\mathcal{A}$ s'il est l'étiquette d'un chemin infini acceptant. On note $L^\omega(\mathcal{A})$ l'ensemble des mots infinis acceptés par $\mathcal{A}$.

Résultat fondamental

Théorème

Si $\mathcal{A}$ est un automate de Muller, $L^\omega(\mathcal{A})$ est ω-rationnel.

Résultat fondamental

Théorème

Si $\mathcal{A}$ est un automate de Muller, $L^\omega(\mathcal{A})$ est ω-rationnel.

Théorème (McNaughton)

Tout langage ω-rationnel est reconnu par un automate de Muller.

Illustration

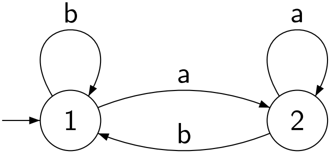


FIGURE: Un automate de Muller, de table $\{\{2\}\}$ reconnaissant $(a+b)^*a^\omega$.