Automates sur les mots infinis

Guillaume Roux

décembre 2010

Table des matières

Qui cherche l'infini n'a qu'à fermer les yeux.
Milan Kundera, L'Insoutenable légèreté de l'être

Introduction

L'étude des automates et des langages rationnels peut conduire à s'intéresser au cas théorique des automates sur les mots infinis. De nombreuses notions et propriétés développées dans le cadre des automates sur les mots finis trouvent leur équivalent dans le cas de ces automates particuliers. Ainsi, les langages ω-rationnels sont construits à partir des lettres de l'alphabet en utilisant les opération rationnelles usuelles (union, produit et itération finie) ainsi qu'une quatrième opération appelée itération infinie. On retrouve également un analogue du théorème de Kleene, qui établit le lien entre les langages ω-rationnels et les langages reconnaissables par automate.

Néanmoins, des difficultés nouvelles surgissent pour des résultats tels que le théorème de déterminisation, qui pour les mots finis assure que tout automate est équivalent à un automate déterministe. En effet, si les automates sur les mots infinis présentent un fonctionnement similaire, en revanche leur mode d'acceptation diffère. Il en existe plusieurs, le plus simple étant celui introduit par Büchi ; or, la classe de langages reconnus par les automates de Büchi déterministes est strictement incluse dans celle des langages reconnaissables par automate de Büchi. On ne dispose donc pas du théorème recherché, et en particulier on ne peut démontrer la clôture des langages reconnaissables par complémentation comme pour les automates finis. Afin de pallier cette déficience, un autre mode d'acceptation plus puissant a été défini, celui de Muller, pour lequel on dispose bien cette fois d'un résultat (du à R. McNaughton) analogue au théorème de déterminisation.

Ce document, après une présentation des notions et de quelques résultats élémentaires de la théorie des automates sur les mots infinis, expose une démonstration alternative de la clôture par complémentation des langages reconnaissables. Cette preuve n'utilise pas le théorème de McNaughton (dont la démonstration, particulièrement longue, n'est pas présentée ici), mais s'appuie sur un résultat du à Ramsey. Il s'attache ensuite à mettre en évidence le problème posé par les automates de Büchi, avant de terminer par une rapide ouverture sur les automates de Muller.

1 Définitions

1.1 Mots et langages

On considère, pour l'ensemble de ce document, un alphabet A. Par analogie avec les mots finis sur A, on définit les mots infinis sur A. On étend sans problème à ces mots de nombreuses notions afférentes aux mots finis (par exemple, la concaténation d'un mot fini et d'un mot infini, les morphismes, ainsi que la réunion et le produit de langages - à condition, pour la dernière opération, que le premier langage considéré soit composé de mots finis).

Définition 1.1 (Mots infinis)**.** On note A^ω l'ensemble des mots infinis sur A. On définit également $A^\infty = A^* \cup A^\omega$ l'ensemble des mots sur A, finis ou infinis.

Définition 1.2 (Itération infinie)**.** Soit $X \subseteq A^*$. On définit :

$$X^\omega = \{x_0x_1... \mid \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in X \setminus \{\varepsilon\}\}$$

et

$$X^\infty = X^* \cup X^\omega.$$

Définition 1.3 (Langages ω-rationnels)**.** La classe des langages ω-rationnels de A^∞ est la plus petite classe $\mathcal{R}$ de parties de A^∞ vérifiant :

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$, et $\forall a \in A, \{a\} \in \mathcal{R}$,
2. $\mathcal{R}$ est close par réunion finie,
3. $\forall X \in A^* \cap \mathcal{R}, \forall Y \in A^\infty \cap \mathcal{R}, XY \in \mathcal{R}$,
4. $\forall X \in A^* \cap \mathcal{R}, X^* \in \mathcal{R}$ et $X^\infty \in \mathcal{R}$.

Dans ce qui suit, on s'intéressera particulièrement aux langages ω-rationnels de A^∞ inclus dans A^ω. On note $\mathcal{R}at(A^\omega)$ leur ensemble.

Exemple 1.4. L'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui commencent par a et contiennent une infinité de b est un langage ω-rationnel de A^ω. En effet, il est donné par l'expression rationnelle $a(a^*b)^\omega$.

1.2 Automates de Büchi

Définition 1.5 (Automate de Büchi)**.** On appelle *automate de Büchi* tout quintuplet $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$, où :
- (Q, A, E) est un automate (au sens classique, à ceci près que Q peut être infini),
- I et F sont des parties de Q, appelées respectivement ensembles des états initiaux et finaux.

Le fonctionnement d'un automate de Büchi est similaire à celui d'un automate sur les mots finis ; dans la suite, on notera $p \xrightarrow{w} q$ pour exprimer qu'il existe un chemin de l'état p à l'état q étiqueté par le mot w, et $p \xrightarrow[F]{w} q$ s'il existe un tel chemin passant par un état final.

On définit, comme pour les automates finis, les notions d'automate complet et déterministe. En revanche, le mode d'acceptation ne peut bien entendu être le même, on le définit donc comme suit.

Définition 1.6 (Acceptation par un automate de Büchi)**.** Soit $\mathcal{A}$ un automate de Büchi.
- Un chemin infini dans $\mathcal{A}$ est dit *acceptant* si son état de départ est initial et s'il passe infiniment souvent par des états finaux.

– Un mot (infini) est dit *accepté* par $\mathcal{A}$ s'il est l'étiquette d'un chemin infini acceptant. On note $L^\omega(\mathcal{A})$ l'ensemble des mots infinis acceptés par $\mathcal{A}$.
– Une partie X de A^ω est dite *reconnaissable* s'il existe un automate de Büchi fini $\mathcal{A}$ tel que $X = L^\omega(\mathcal{A})$.

Exemple 1.7. Le langage $a(a^*b)^\omega$ évoqué précédemment est reconnu par l'automate de Büchi représenté sur la figure 1 (les états initiaux sont représentés munis d'une flèche entrante, les états finaux doublement cerclés).

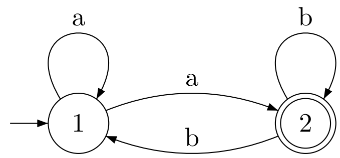

Figure 1 – Un exemple d'automate.

2 Langages reconnaissables par un automate de Büchi

2.1 Lien avec les langages ω-rationnels

On dispose, pour les mots infinis, d'un résultat similaire au théorème de Kleene pour les mots finis. Afin de parvenir à ce résultat, on commence par établir deux propriétés ; la seconde, bien que relativement élémentaire, est une caractérisation assez importante.

Proposition 2.1. *La classe des langages reconnaissables est close par réunion finie.*

Démonstration. La preuve ne présente pas plus de difficulté que pour les automates finis : soient X et X' deux langages reconnus respectivement par les automates de Büchi finis $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ et $\mathcal{A}' = (Q', A, E', I', F')$. On peut toujours supposer Q et Q' disjoints ; alors $X \cup X'$ est reconnu par l'automate fini $(Q \cup Q', A, E \cup E', I \cup I', F \cup F')$. $\square$

Théorème 2.2. *Un langage de A^ω est ω-rationnel si et seulement si il s'écrit comme une réunion finie de langages de la forme XY^ω, où X et Y sont des langages rationnels de A^*.*

Démonstration. Notons Δ la classe des langages définis dans le théorème. Il est clair que les éléments de Δ sont bien des langages ω-rationnels de A^ω. Afin de prouver la réciproque, on démontre un résultat un plus puissant : si X est un langage ω-rationnel de A^∞, alors :

1. $X \cap A^*$ est un langage rationnel de A^*.
2. $X \cap A^\omega \in \Delta$.

Pour établir cela, il suffit de prouver que la classe $\mathcal{E}$ des langages de A^∞ vérifiant ces deux conditions satisfait aux propriétés définissant la classe des langages ω-rationnels de A^∞ (on aura alors le résultat désiré par minimalité).

– On a bien $\emptyset \in \mathcal{E}$, et $\forall a \in A, \{a\} \in \mathcal{E}$.
– $\mathcal{E}$ est close par réunion finie par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion.
– $\mathcal{E}$ est close par produit. En effet, si $X \subseteq A^* \cap \mathcal{E}$ et $Y \subseteq A^\infty \cap \mathcal{E}$, $XY \cap A^* = X(Y \cap A^*)$ est rationnel car Y satisfait (1) et X est rationnel, et $XY \cap A^\omega = X(Y \cap A^\omega) \in \Delta$ car Y satisfait (2) et X est rationnel.

– $\forall X \in A^* \cap \mathcal{E}, X^* \in \mathcal{E}$ et $X^\infty \in \mathcal{E}$ car X est rationnel et car $X^* \subseteq A^*$ et $X^\omega \subseteq A^\omega$.
D'où le résultat. $\square$

On peut à présent énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Une partie de A^ω est reconnaissable si et seulement si elle est ω-rationnelle.*

Démonstration. ($\Longrightarrow$) La preuve de cette implication est similaire à celle réalisée pour les langages rationnels et les mots finis. On donnera plus loin une autre preuve plus rapide, bien que moins directe.

($\Longleftarrow$) En vertu de la proposition 2.1 et du théorème 2.2, on peut se limiter aux langages de la forme $X(X')^\omega$. Soit donc $Y = X(X')^\omega$, où X et X' sont des langages rationnels (de A^*). On peut toujours supposer $\varepsilon \notin X'$. Pour X, on remarque que l'on peut écrire $X(X')^\omega = (X \setminus \varepsilon)(X')^\omega \cup (X')^\omega$, et on utilise à nouveau la proposition 2.1 - $(X')^\omega$ étant reconnu par l'automate de la figure 2, en prenant pour $\mathcal{A}$ l'automate trivial à un état et pour $\mathcal{A}'$ un automate normalisé reconnaissant X'. On suppose donc à présent que $\varepsilon \notin X$. Soient $\mathcal{A} = (Q, A, E, i, f)$ et $\mathcal{A}' = (Q', A, E', i', f')$ deux automates normalisés reconnaissant X et X'. L'automate représenté sur la figure 2 reconnaît alors bien le langage $X(X')^\omega$. $\square$

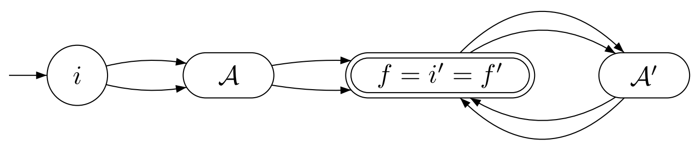

FIGURE 2 – Un automate reconnaissant $X(X')^\omega$.

2.2 Propriétés de clôture

On établit ici la clôture des langages reconnaissables par complémentation. Avant toute chose, commençons par énoncer et démontrer le résultat clé, du à Ramsey.

Théorème 2.4 (Factorisation ramseyenne)**.** *Soit $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{N}) \to C$, où C est un ensemble fini et $\mathcal{P}_2(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties à 2 éléments de $\mathbb{N}$.*
Il existe une partie infinie E de $\mathbb{N}$ telle que $f(\mathcal{P}_2(E))$ soit un singleton.

On appelle classiquement les éléments de C des *couleurs*. On peut alors voir l'image d'une paire par la fonction f comme la couleur d'une arche reliant ces deux points (voir par exemple la figure 3) ; le théorème signifie alors qu'on peut trouver une partie infinie E telle que toutes les arches reliant deux éléments de E soient de la même couleur.

Démonstration. On définit une suite $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de la manière suivante. Posons $U_0 = \mathbb{N}$. Supposons $U_0, ..., U_i$ construits. Soit $u_i = \min U_i$; C étant fini, $\exists e_i \in C$ tel que $T = \{n \in U_i \mid f(\{u_i, n\}) = e_i, n > u_i\}$ soit infini. On pose alors $U_{i+1} = T$. La séquence des $u_i = \min U_i$ ainsi obtenue est illustrée sur la figure 3.

Par construction, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}^*, f(\{u_i, u_{i+j}\}) = e_i$$

et C étant fini, on peut extraire de $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, e_{i_k} = e_{i_0}$. Dès lors l'ensemble $E = \{u_{i_k}, k \in \mathbb{N}\}$ satisfait bien la condition recherchée. $\square$

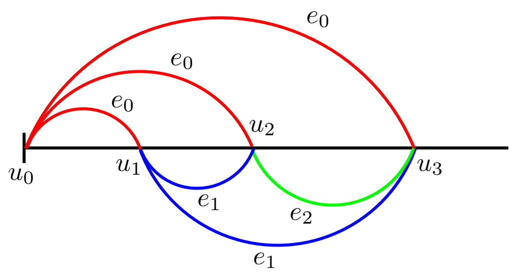

Figure 3 – La suite des indices.

On peut à présent réaliser la démonstration proprement dite. Soit donc X un langage reconnaissable, et $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ un automate de Büchi reconnaissant X. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur A^* par :

$$w \sim w' \Leftrightarrow \forall (p,q) \in Q^2, \begin{cases} p \xrightarrow{w} q \Leftrightarrow p \xrightarrow{w'} q \\ p \xrightarrow[F]{w} q \Leftrightarrow p \xrightarrow[F]{w'} q \end{cases}$$

Cette relation est clairement une relation d'équivalence ; de plus elle est d'indice fini, puisque le nombre de classes ne peut dépasser $3^{|Q|^2}$. En effet, pour tout couple (p, q) d'états et un mot w, soit il n'existe pas de chemin menant de l'un à l'autre étiqueté par w, soit il en existe un mais aucun passant par un état final, soit il en existe un passant par un état final ; chaque couple (p, q) discrimine donc au plus 3 types de mots différents.

Proposition 2.5. *La relation $\sim$ est une congruence.*

Démonstration. Supposons $w \sim w'$ et considérons deux mots u et v. Le fait que $uwv \sim uw'v$ résulte alors de ce que

$$p \xrightarrow{uwv} q \Leftrightarrow \exists r, s \in Q \mid p \xrightarrow{u} r \text{ et } r \xrightarrow{w} s \text{ et } s \xrightarrow{v} q$$

avec au moins un des ces trois chemins passant par un état final si $p \xrightarrow[F]{uwv} q$. □

On peut donc définir le monoïde quotient $A^*/\sim$, qui est un monoïde fini d'après ce qui précède. Il en résulte qu'en notant $[u]$ la classe d'un mot u, $[u]$ est rationnel puisque reconnu par le morphisme de projection sur $A^*/\sim$.

Proposition 2.6. *Soient deux mots u et v avec $v \neq \varepsilon$. On pose $Y = [u][v]^\omega \subseteq A^\omega$. Alors $Y \cap X = \emptyset$ ou $Y \subseteq X$.*

Démonstration. Supposons $Y \cap X \neq \emptyset$ et considérons $x \in Y \cap X$. On a $x = u_0v_1v_2v_3...$ avec $u_0 \sim u$ et $\forall i, v_i \sim v$. Puisque $x \in X$, il existe un calcul acceptant étiqueté par x dans (A), de la forme :

$$q_0 \xrightarrow{u_0} q_1 \xrightarrow[F]{v_1} q_2 \xrightarrow{v_2} q_3 \xrightarrow[F]{v_3} q_4 \xrightarrow[F]{v_4} ...$$

avec $q_0 \in I$, et où il existe une infinité de transitions $q_i \xrightarrow[F]{v_i} q_{i+1}$ passant par un état final.

Soit alors $x' \in Y$. Écrivons $x' = u_0'v_1'v_2'v_3'...$, avec $u_0' \sim u$ et $\forall i, v_i' \sim v$. Par définition de la relation $\sim$, on a le calcul suivant.

$$q_0 \xrightarrow{u_0'} q_1 \xrightarrow[F]{v_1'} q_2 \xrightarrow{v_2'} q_3 \xrightarrow[F]{v_3'} q_4 \xrightarrow[F]{v_4'} ...$$

On en déduit $x' \in X$ et $Y \subseteq X$, ce qui était le résultat recherché. $\square$

Proposition 2.7. $\forall x \in A^\omega, \exists u, v \mid x \in [u][v]^\omega$.

Démonstration. Notons $x = a_0a_1a_2a_3....$ On utilise le théorème de factorisation ramseyenne démontré précédemment. Pour ce faire, on définit $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{N}) \to A^*/\sim$ par $f(\{i,j\}) = [a_ia_{i+1}...a_{j-1}]$ pour $i < j$ (l'ensemble d'arrivée étant bien fini d'après une remarque faite plus haut). D'après le théorème 2.4, il existe une partie infinie $E = \{i_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ de $\mathbb{N}$ (avec $i_n < i_{n+1}$) telle que $f(\mathcal{P}_2(E))$ soit un singleton. On pose alors $u_0 = a_0a_1...a_{i_0-1}$, et $v_k = a_{i_k}...a_{i_{k+1}-1}$ pour $k \geq 1$. Dès lors $\forall k, k' \geq 1, [v_k] = [v_{k'}]$, et on a donc $x \in [u_0][v_1]^\omega$. $\square$

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat recherché :

Théorème 2.8. *Le complémentaire de X est décrit par*

$$A^\omega \setminus X = \bigcup_{\substack{u,\, v \\ [u]\,[v]^\omega \cap X = \emptyset}} [u][v]^\omega$$

et en particulier est ω-rationnel.

Démonstration. L'inclusion réciproque est évidente ; montrons l'inclusion directe. Soit $x \in A^\omega \setminus X$. D'après la proposition 2.7, $\exists u, v \mid x \in [u][v]^\omega$, et d'après la proposition 2.6, $[u][v]^\omega \cap X = \emptyset$, ce qui conclut. $\square$

De la proposition 2.1 et de ce qui précède (et par le théorème de Kleene), on déduit donc le théorème de stabilité suivant pour la classe des langages reconnaissables :

Théorème 2.9 (Büchi)**.** *La classe des langages reconnaissables est close par réunion, intersection et complémentation.*

Remarque 2.10. Les mêmes arguments que ceux de la démonstration du théorème 2.8 montrent que

$$X = \bigcup_{\substack{u,\, v \\ [u]\,[v]^\omega \subseteq X}} [u][v]^\omega$$

ce qui fournit une autre démonstration de l'implication directe dans le théorème de Kleene (il n'y a pas de circularité).

2.3 Limites des automates de Büchi et automates de Muller

Dans cette dernière partie, on donne les arguments justifiant la nécessité de définir un mode d'acceptation plus puissant que celui des automates de Büchi. En effet, comme exposé au cours de l'introduction, un inconvénient majeur de ces derniers est que l'on ne dispose pas de théorème de déterminisation analogue à celui pour les automates sur les mots finis. Ce qui suit présente un langage reconnaissable mais non reconnaissable par un automate de Büchi déterministe, et introduit rapidement les automates de Muller.

On commence par donner une définition et énoncer une propriété utile.

Définition 2.11. Étant donné $L \subseteq A^*$, on définit :

$$\overrightarrow{L} = \{u \in A^\omega \mid \text{u a une infinité de préfixes dans } L\}$$

Exemple 2.12.

1. $\overrightarrow{a^*b} = \emptyset$.
2. $\overrightarrow{(ab)^+} = (ab)^\omega$.
3. $\overrightarrow{(a+b)^*b} = (a^*b)^\omega$.

Proposition 2.13. *Soit $\mathcal{A}$ un automate de Büchi déterministe. Alors $L^\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L^+(\mathcal{A})}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, i, F)$. Si $u \in L^\omega(\mathcal{A})$, alors u est l'étiquette d'un chemin

$$p = (q_0, a_0, q_1)(q_1, a_1, q_2)...$$

tel que $q_0 = i$ et qu'il existe une sous-suite $(q_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes appartiennent à F. Par construction, les mots $u_k = a_0a_1...a_{n_{k-1}}$ sont dans $L^+(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}) \setminus \{\varepsilon\}$ et sont préfixes de u ; par suite $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \overrightarrow{L^+(\mathcal{A})}$.

Réciproquement, si $u \in \overrightarrow{L^+(\mathcal{A})}$, u possède une infinité de préfixes dans $\overrightarrow{L^+(\mathcal{A})}$. $\mathcal{A}$ étant déterministe, il en résulte que u est l'étiquette d'un chemin partant de l'état initial et traversant infiniment souvent des états finaux, et donc que $u \in L^\omega(\mathcal{A})$. □

Remarque 2.14. La réciproque de cette propriété est vraie : soit $L \subseteq A^+$. Alors $\mathcal{A} = (A^*, A, \cdot, \varepsilon, L)$, où la fonction de transition est définie par $u \cdot a = ua$ pour tout $u \in A^*$ et pour tout $a \in A$, est un automate déterministe reconnaissant L. D'après la proposition précédente, on a alors $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{L^+(\mathcal{A})} = L^\omega(\mathcal{A})$ donc $\overrightarrow{L}$ est reconnu par un automate de Büchi déterministe.

Intéressons-nous à présent à l'automate de Büchi $\mathcal{A}$ non déterministe représenté sur la figure 4. Le langage qu'il reconnaît est $L^\omega(\mathcal{A}) = (a+b)^*a^\omega$, c'est-à-dire l'ensemble des mots infinis ne contenant qu'un nombre fini d'occurrences de b.

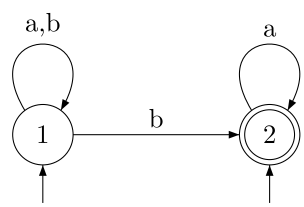

Figure 4 – Un automate de Büchi non déterministe.

Montrons que ce langage ne peut être reconnu par un automate de Büchi déterministe. Si c'était le cas, il existerait d'après la proposition précédente un langage L tel que $L^\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L}$. Le mot ba^ω admettrait alors un préfixe ba^{n_1} dans L, le mot $ba^{n_1}ba^\omega$ un préfixe $ba^{n_1}ba^{n_2}$ dans L, et ainsi de suite. Le mot infini $ba^{n_1}ba^{n_2}ba^{n_3}...$ admettrait donc une infinité de préfixes dans L, donc appartiendrait à $\overrightarrow{L}$, ce qui est impossible puisqu'il contient une infinité de b.

Le pouvoir de reconnaissance des automates de Büchi déterministes (même infinis, la démonstration de la proposition 2.13 ne requérant en fait pas l'hypothèse de finitude de l'automate) est ainsi moindre. Ce problème disparaît si l'on considère un mode d'acceptation plus puissant : celui des automates de Muller.

Définition 2.15 (Automate de Muller)**.** On appelle *automate de Muller* tout quintuplet $\mathcal{A} = (Q, A, E, i, \mathcal{T})$, où :

1. (Q, A, E) est un automate fini déterministe,
2. i est l'état initial,
3. $\mathcal{T}$ est un ensemble de parties de Q, appelé la *table* de l'automate.

Définition 2.16 (Acceptation par un automate de Muller)**.** Soit $\mathcal{A}$ un automate de Muller.

– Étant donné un chemin p dans l'automate, on note $\mathrm{Inf}(p)$ l'ensemble des états par lesquels ce chemin passe une infinité de fois.
– Un chemin infini dans $\mathcal{A}$ est dit *acceptant* si son état de départ est i et si $\mathrm{Inf}(p) \in \mathcal{T}$.
– Un mot (infini) est dit *accepté* par $\mathcal{A}$ s'il est l'étiquette d'un chemin infini acceptant. On note $L^\omega(\mathcal{A})$ l'ensemble des mots infinis acceptés par $\mathcal{A}$.

Dans ce cas, on dispose, comme pour les automates, des théorèmes suivants, que l'on ne démontrera pas ici (leur démonstration, en particulier celle du théorème de Mc Naughton, excèdent largement le cadre de ce document).

Théorème 2.17. *Si $\mathcal{A}$ est un automate de Muller, $L^\omega(\mathcal{A})$ est ω-rationnel.*

Théorème 2.18 (McNaughton)**.** *Tout langage ω-rationnel est reconnu par un automate de Muller.*

Exemple 2.19. L'automate représenté sur la figure 5 et avec pour table $\mathcal{T} = \{\{2\}\}$ est un automate de Muller qui reconnaît le langage $(a+b)^*a^\omega$ étudié plus avant.

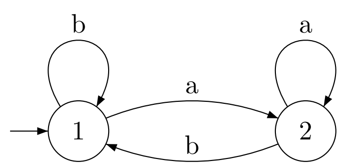

Figure 5 – Un automate de Muller reconnaissant $(a+b)^*a^\omega$.

Références

[1] Dominique Perrin et Jean-Éric Pin. *Infinite words*. Pure and Applied Mathematics Vol 141, Elsevier, 2004.