Suites automatiques

Lucas Boczkowski

Janvier 2011

Plan

Définition (Suite de Thue-Morse)

Pour n entier, on note s_n la somme des chiffres de n écrit en base 2.
On définit $t_n := s_n[2]$

Premiers termes :

$$011010011001...$$

Définition (Suite de Thue-Morse)

Pour n entier, on note s_n la somme des chiffres de n écrit en base 2.
On définit $t_n := s_n[2]$

Premiers termes :

$$011010011001...$$

Définition (Thue-Morse 2)

$$t_0 = 0,$$
$$\forall n,\ t_{2n} = t_n,$$
$$\forall n,\ t_{2n+1} = 1 - t_n$$

Définition (Thue-Morse 3)

Considérons le morphisme 2-uniforme $\sigma : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ donné par

$$\sigma(0) = 01$$
$$\sigma(1) = 10$$

Alors t correspond au point fixe de σ : $\sigma^\infty(0)$

En quoi la suite est-elle *automatique*?

Définition

Soit k un entier ≥ 2. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est *k-automatique* s'il existe un automate $\mathcal{A} = \{\mathcal{Q}, \delta, q_o, \tau\}$ tel que :

$$\forall n, \tau(\delta(q_0, \langle n \rangle_k)) = u_n$$

Autrement dit, si on lit dans l'automate $\mathcal{A}$ la suite constituée des chiffres de n en base k à partir du chiffre de poids faible, on tombe sur un état dont la valeur de sortie est u_n.

En quoi la suite est-elle *automatique*?

Définition

Soit k un entier ≥ 2. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est *k-automatique* s'il existe un automate $\mathcal{A} = \{\mathcal{Q}, \delta, q_o, \tau\}$ tel que :

$$\forall n, \tau(\delta(q_0, \langle n \rangle_k)) = u_n$$

Autrement dit, si on lit dans l'automate $\mathcal{A}$ la suite constituée des chiffres de n en base k à partir du chiffre de poids faible, on tombe sur un état dont la valeur de sortie est u_n.

Remarque

automatique VS désordonnée?

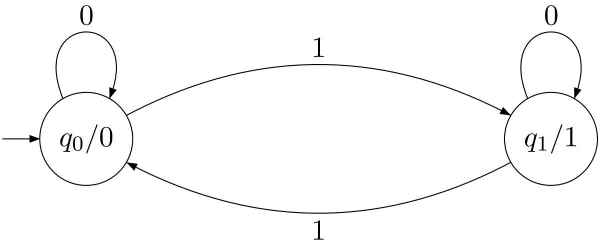

Figure: Automate de Thue-Morse

Remarque

q/α est une notation pour dire que la valeur de sortie à l'état q, $\tau(q)$, est α.

Définition

Pour une suite u donnée et un entier k, le *k-noyau* que l'on notera $K_u^{(k)}$ ou plus simplement K_u lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté est:

$$K_u^{(k)} \stackrel{def}{=} \{(u(k^\alpha n + r))_n \ /\alpha \in \mathbb{N},\ 0 \leq r < \alpha\}$$

Proposition (Cobham, 1972)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\{0, .., k-1\}$, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) *la suite $(u_n)_n$ est k-automatique*

Définition

Pour une suite u donnée et un entier k, le *k-noyau* que l'on notera $K_u^{(k)}$ ou plus simplement K_u lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté est:

$$K_u^{(k)} \stackrel{def}{=} \{(u(k^\alpha n + r))_n \ /\alpha \in \mathbb{N},\ 0 \leq r < \alpha\}$$

Proposition (Cobham, 1972)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\{0, .., k-1\}$, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) *la suite $(u_n)_n$ est k-automatique*

ii) *le noyau de u, K_u, est fini*

Définition

Pour une suite u donnée et un entier k, le *k-noyau* que l'on notera $K_u^{(k)}$ ou plus simplement K_u lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté est:

$$K_u^{(k)} \overset{def}{=} \{(u(k^\alpha n + r))_n \ /\alpha \in \mathbb{N},\ 0 \leq r < \alpha\}$$

Proposition (Cobham, 1972)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\{0, \ldots, k-1\}$, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) *la suite $(u_n)_n$ est k-automatique*

ii) *le noyau de u, K_u, est fini*

iii) *la suite $(u_n)_n$ est image d'un point fixe d'un morphisme k-uniforme*

Petits calculs dans $\mathbb{F}_2$:

$$F(X) := \sum_n t_n X^n = \sum_n t_{2n} X^{2n} + \sum_n t_{2n+1} X^{2n+1}$$

Petits calculs dans $\mathbb{F}_2$:

$$\begin{aligned} F(X) := \sum_n t_n X^n &= \sum_n t_{2n} X^{2n} + \sum_n t_{2n+1} X^{2n+1} \\ &= \sum_n t_n X^{2n} + \sum_n X^{2n+1} + \sum_n t_n X^{2n+1} \end{aligned}$$

Petits calculs dans $\mathbb{F}_2$:

$$\begin{aligned}
F(X) := \sum_n t_n X^n &= \sum_n t_{2n} X^{2n} + \sum_n t_{2n+1} X^{2n+1} \\
&= \sum_n t_n X^{2n} + \sum_n X^{2n+1} + \sum_n t_n X^{2n+1} \\
&= F(X^2) + \frac{X}{1+X^2} + XF(X^2)
\end{aligned}$$

Petits calculs dans $\mathbb{F}_2$:

$$\begin{aligned} F(X) := \sum_n t_n X^n &= \sum_n t_{2n} X^{2n} + \sum_n t_{2n+1} X^{2n+1} \\ &= \sum_n t_n X^{2n} + \sum_n X^{2n+1} + \sum_n t_n X^{2n+1} \\ &= F(X^2) + \frac{X}{1+X^2} + XF(X^2) \\ &= (1+X)F(X)^2 + \frac{X}{1+X^2} \end{aligned}$$

Généralisons :

Théorème (Christol, 1979)

Soit p un nombre premier ≥ 2 et q une puissance de p. Une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{F}_q$ est q-automatique si et seulement si la série formelle $F(u) = \sum_n u_n X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$.

preuve (idée de).

Sens direct. $d := \mathrm{Card}(K_u)$. On montre (petits calculs) que

$$\forall k \leq d : F(u)^{q^k} \in \mathrm{Vect}_{v \in K_u} \langle F(v)^{q^{d+1}} \rangle$$

$$\text{or } \dim \mathrm{Vect}_{v \in K_u} \langle F(v)^{q^{d+1}} \rangle \leq \mathrm{Card}(K_u)$$

et la famille $\{F(u), F(u)^q, \ldots, F(u)^{q^d}\}$ est liée.
Sens indirect. (Idée) Trouver un ensemble fini de séries formelles contenant F_u et stable par les applications

$$\Lambda_r : \sum_n a_n X^n \in \mathbb{F}_q[[X]] \mapsto \sum_n a_{qn+r} X^n$$

$\square$

Théorème

Soit k et l deux entiers multiplicativement indépendants et soit u une suite k ***et*** *l-automatique. Alors u est ultimement périodique.*

Corollaire

Soit q_1 et q_2 multiplicativement indépendants et u telle que F_u soit à la fois algébrique sur $\mathbb{F}_{q_1}$ et $\mathbb{F}_{q_2}$. Alors u est ultimement périodique.

Corollaire

Soit q_1 et q_2 multiplicativement indépendants et u telle que F_u soit à la fois algébrique sur $\mathbb{F}_{q_1}$ et $\mathbb{F}_{q_2}$. Alors u est ultimement périodique.

à comparer à

Conjecture

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que les deux nombres réels $\sum_{n\geq 0} u_n 2^{-n}$ et $\sum_{n\geq 0} u_n 3^{-n}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ alors ces deux nombres sont rationnels.