Motifs Inévitables

Martin Clochard

13 Janvier 2011

- Définitions ,exemples, et propriétés basiques sur l'inévitabilité

- Définitions ,exemples, et propriétés basiques sur l'inévitabilité
- Decidabilité de l'inévitabilité

Definitions

- Motif : Il s'agit d'un mot, comme $\alpha\beta\alpha$. Vu comme une expression à paramètres dans les mots, il permet de définir l'ensemble des mots de cette forme, par exemple ici $\{\alpha\beta\alpha | (\alpha, \beta) \in A^+\}$.

Definitions

- Motif : Il s'agit d'un mot, comme $\alpha\beta\alpha$. Vu comme une expression à paramètres dans les mots, il permet de définir l'ensemble des mots de cette forme, par exemple ici $\{\alpha\beta\alpha|(\alpha,\beta) \in A^+\}$.
- Formellement cette ensemble est l'ensemble des images du motif par les morphismes non-effaçants. On le note $p(A^+)$ (p : motif ,A : alphabet).

Definitions

- Motif : Il s'agit d'un mot, comme $\alpha\beta\alpha$. Vu comme une expression à paramètres dans les mots, il permet de définir l'ensemble des mots de cette forme, par exemple ici $\{\alpha\beta\alpha|(\alpha,\beta) \in A^+\}$.
- Formellement cette ensemble est l'ensemble des images du motif par les morphismes non-effaçants. On le note $p(A^+)$ (p : motif ,A : alphabet).
- Les lettres du motifs sont appellées des *variables*.

Definitions

- Motif : Il s'agit d'un mot, comme $\alpha\beta\alpha$. Vu comme une expression à paramètres dans les mots, il permet de définir l'ensemble des mots de cette forme, par exemple ici $\{\alpha\beta\alpha|(\alpha,\beta)\in A^+\}$.
- Formellement cette ensemble est l'ensemble des images du motif par les morphismes non-effaçants. On le note $p(A^+)$ (p : motif ,A : alphabet).
- Les lettres du motifs sont appellées des *variables*.
- Inévitable : tout mot suffisament long possède un facteur dans cet ensemble.

Definitions

- Motif : Il s'agit d'un mot, comme $\alpha\beta\alpha$. Vu comme une expression à paramètres dans les mots, il permet de définir l'ensemble des mots de cette forme, par exemple ici $\{\alpha\beta\alpha | (\alpha, \beta) \in A^+\}$.
- Formellement cette ensemble est l'ensemble des images du motif par les morphismes non-effaçants. On le note $p(A^+)$ (p : motif ,A : alphabet).
- Les lettres du motifs sont appellées des *variables*.
- Inévitable : tout mot suffisament long possède un facteur dans cet ensemble.
- On dit donc qu'un mot *évite* un motif s'il ne possède pas de facteur dans l'ensemble généré par celui-ci.

Inévitabilité et cardinal

L'inévitabilité recouvre plusieurs notions :

- L'inévitabilité relative à un alphabet donné (fini) A : tout mot suffisament long de A possède un facteur dans l'ensemble généré par le motif.

Inévitabilité et cardinal

L'inévitabilité recouvre plusieurs notions :

- L'inévitabilité relative à un alphabet donné (fini) A : tout mot suffisament long de A possède un facteur dans l'ensemble généré par le motif.
- L'inévitabilité totale : inévitable relativement a tout alphabet.

Inévitabilité et cardinal

L'inévitabilité recouvre plusieurs notions :

- L'inévitabilité relative à un alphabet donné (fini) A : tout mot suffisament long de A possède un facteur dans l'ensemble généré par le motif.
- L'inévitabilité totale : inévitable relativement a tout alphabet.

L'inévitabilité d'un motif dépend donc a priori de la taille de l'alphabet considéré.

Quelques exemples et propriétés basiques

- Le mot vide et le motif α sont inévitable.

Quelques exemples et propriétés basiques

- Le mot vide et le motif α sont inévitable.
- Tout motif est inévitable sur un alphabet de taille 1.

Quelques exemples et propriétés basiques

- Le mot vide et le motif α sont inévitable.
- Tout motif est inévitable sur un alphabet de taille 1.
- Le carré $(\alpha\alpha)$ est inévitable sur un alphabet de taille 2.

Quelques exemples et propriétés basiques

- Le mot vide et le motif α sont inévitable.
- Tout motif est inévitable sur un alphabet de taille 1.
- Le carré $(\alpha\alpha)$ est inévitable sur un alphabet de taille 2.
- Si un motif p n'évite pas le motif q et si p est inévitable sur l'alphabet A alors q est inévitable sur A.

Cas des puissances

Les motifs puissances d'ordre superieurs a 3 sont évitables sur un alphabet de taille 2.

Cas des puissances

Les motifs puissances d'ordre superieurs a 3 sont évitables sur un alphabet de taille 2.

Pour le montrer on construit un mot infini sur $\{0, 1\}$ qui évite les cubes. Il s'agit du mot de Thue-Morse : l'unique point fixe commençant par 0 de
$\Theta : 0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 10$.
Ce mot est même sans chevauchement : il évite aussi le motif $\alpha\beta\alpha\beta\alpha$.

Cas des puissances

Les motifs puissances d'ordre superieurs a 3 sont évitables sur un alphabet de taille 2.

Pour le montrer on construit un mot infini sur $\{0, 1\}$ qui évite les cubes. Il s'agit du mot de Thue-Morse : l'unique point fixe commençant par 0 de
$\Theta : 0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 10$.
Ce mot est même sans chevauchement : il évite aussi le motif $\alpha\beta\alpha\beta\alpha$.

La construction de ce mot repose sur le lemme suivant : si a est préfixe propre de $\phi(a)$, où ϕ est un morphisme non-effaçant, alors $\phi^n(a)$ est préfixe propre de $\phi^{n+1}(a)$ pour $n \in \mathbb{N}$. En particulier cela fournit l'existence et l'unicité de ce mot.

cas particulier des carrés

Les carrés sont inévitables sur un alphabet de taille 3.
Idée de démonstration : On considère les morphismes
$\mu : 0 \to 012, 1 \to 02, 2 \to 1$ et
$\nu : 0 \to 011, 1 \to 01, 2 \to 0$.
On remarque alors que $\Theta \circ \nu = \nu \circ \mu$: Si u est le point fixe infini de μ commençant par 0, $\nu(u)$ est point fixe de Θ. Via ν on fait correspondre les facteurs carrés potentiels de u avec des chevauchement dans $\nu(u)$.

Une famille de motifs inévitables

On pose $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille de variables distinctes. On définit les motifs de Zimin par :

- $Z_0 = \epsilon$
- $Z_{n+1} = Z_n \alpha_n Z_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Les motifs de Zimin, ou sesquipuissances, sont inévitables.

Une famille de motifs inévitables

On pose $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables distinctes. On définit les motifs de Zimin par :

- $Z_0 = \epsilon$
- $Z_{n+1} = Z_n\alpha_n Z_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Les motifs de Zimin, ou sesquipuissances, sont inévitables.

La preuve découle immédiatement du lemme suivant :

Lemme

Si p est un motif inévitable relativement à A, ζ une variable qui n'apparait pas dans p, alors $p\zeta p$ est inévitable relativement à A.

Preuve du lemme

Puisque p est inévitable, au-delà d'une longueur N aucun mot de A^* n'évite p.
On pose $M = |\{\omega \in p(A^+) || \omega| \leq N\}|$, et on prend $\omega \in A^*$ tel que $|A| \geq (N+1)(M+1)$. Alors : $\omega = u_0 a_0 ... u_N a_N v$, $|u_i| = N$, a_i lettre, v quelconque.
Principe des tiroirs : u_i, u_j, $i < j$ ont un facteur commun dans $p(A^+)$.
Comme il y a au moins une lettre entre ces deux facteurs, ω n'évite pas $p \zeta p$.

Décidabilité de l'inévitabilité

Théorème

L'inévitabilité d'un motif est décidable.

Décidabilité de l'inévitabilité

Théorème

L'inévitabilité d'un motif est décidable.

Pour montrer ce théorème, on montre que l'inévitabilité est équivalente à une notion qu'on appellera la réductibilité, pour laquelle on a un algorithme de décision.

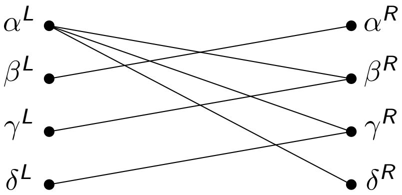
graphe d'adjacence

Le *graphe d'adjacence* d'un motif est le graphe non-orienté biparti composé de :

- Pour les sommets de deux copies de l'ensemble E des variables du motif, notée E^L et E^R (les éléments sont notés α^R et α^L, $a \in E$).
- Des arêtes entre les sommets α^L et β^R tels que $\alpha\beta$ soit facteur du motif.

Exemple de graphe d'adjacence

Pour le motif $\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha\delta\gamma$, le graphe d'adjacence est :



Ensemble libre

Un sous-ensemble non vide F des variables d'un motif est dit *libre* si $\forall(\alpha, \beta) \in F^2$, α^L et β^R ne sont pas dans la même composante connexe.

Par exemple, dans le motif $\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha\delta\gamma$, les ensembles libres sont $\{\alpha\}$ et $\{\beta\}$.

Réduction

Soit p un motif, F un ensemble libre de p, q le motif obtenu en supprimant de p les lettres de F. On dit alors que p *se réduit en une étape* à q, ce qu'on note $p \xrightarrow{F} q$.

Réduction

Soit p un motif, F un ensemble libre de p, q le motif obtenu en supprimant de p les lettres de F. On dit alors que p *se réduit en une étape* à q, ce qu'on note $p \xrightarrow{F} q$.

On définit alors la *réduction* comme la clôture transitive de la réduction en une étape. On dit alors qu'un motif est réductible s'il se réduit au mot vide.

Exemple : le motif précédent est réductible via

$\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha\delta\gamma \xrightarrow{\{\alpha\}} \beta\gamma\beta\delta\gamma \xrightarrow{\{\beta\}} \gamma\delta\gamma \xrightarrow{\{\gamma\}} \delta \xrightarrow{\{\delta\}} \epsilon$

Décidabilité de la réduction

La réduction est évidemment décidable : l'algorithme consiste à explorer toutes les réductions possible.

On remarque qu'effectivement, l'inévitabilité coïncide avec la réductibilité pour les motifs contenant un facteur carré, ainsi que pour les sesquipuissances.
L'exemple ci-dessus montre par ailleurs qu'il faut bien explorer plusieurs réductions, puisque commencer par une réduction par β fait apparaître un carré.
La preuve de l'équivalence de ces notions se découpe en deux parties : une par implication.

La réductibilité implique l'inévitabilité

Preuve : il suffit de montrer que si $p \xrightarrow{F} q$, et si q est inévitable, alors p aussi. Pour cela on procède par récurrence sur le cardinal de l'alphabet A. On choisit une variable a, de sorte que $A = A' \cup \{a\}$. Or $A'^{+} \backslash A'^{*} p(A+) A'^{*}$ est fini. De plus, tout élément de A' commençant par a qui évite p et qui n'est pas une puissance de A s'écrit comme produit d'éléments de $N = \{a^i \omega a^j | \omega \in p(A^+), 0 < i < |p|, 0 \leq j < |p|\}$. Si on voit N comme un alphabet, il suffit de prouver que l'ensemble des éléments de $i(N^+)$ qui évitent p est fini, où i est le morphisme qui à une lettre de N associe elle-même vue comme mot.

Comme q est inévitable, $q\zeta$ aussi (ζ nouvelle variable). Pour ω dans $i(N^+)$ suffisament grand, $i^{-1}(\omega)$ contient donc un facteur dans l'ensemble généré par $q\zeta$, donc f un morphisme non-effaçant de $(E\backslash F) \cup \{\zeta\}$ (E : variables de p) dans $N+$: $f(q\zeta)$ en est facteur, donc $i(f(q\zeta))$ est facteur de ω.
Il reste à construire un morphisme de E dans A tel que p soit facteur de $i(f(q\zeta))$.

On pose C^R l'ensemble des α^R dans une composante connexe d'un élément de F^L, C^L de même pour α^L et F^L.
Le but est de faire disparaître la contribution de F. Pour cela on pose :

$$g(\delta) = \begin{cases} a & \text{si } \delta \in F \\ i(f(\delta)) & \text{si } \delta^R \notin C^R \text{ et } \delta^L \notin C^L \\ a^{-1} i(f(\delta)) & \text{si } \delta^R \in C^R \text{et } \delta^L \notin C^L \\ i(f(\delta))a & \text{si } \delta^R \notin C^R \text{ et } \delta^L \in C^L \text{ et } \delta \notin F \\ a^{-1} i(f(\delta))a & \text{si } \delta^R \in C^R \text{ et } \delta^L \in C^L \end{cases}$$

qui convient.

Les motifs inévitables sont réductibles au mot vide

Il reste l'autre sens de la preuve.

On commence par introduire le mot infini $\omega^{(k)}$ sur l'alphabet $a_0, \dots a_{2k-1}, b_0, \dots b_{2k-1}$ défini comme étant l'unique point fixe commençant par a_0 du morphisme φ_k :

- $\forall i \in [|0, 2k-1|], \varphi_k(a_i) = a_0 b_i a_1 b_{i+1} \dots a_{k-1} b_{i+k-1}$
- $\forall i \in [|0, 2k-1|], \varphi_k(b_i) = a_k b_i a_{k+1} b_{i+1} \dots a_{2k-1} b_{i+k-1}$.

Les motifs inévitables sont réductibles au mot vide

Il reste l'autre sens de la preuve.

On commence par introduire le mot infini $\omega^{(k)}$ sur l'alphabet $a_0, \ldots a_{2k-1}, b_0, \ldots b_{2k-1}$ défini comme étant l'unique point fixe commençant par a_0 du morphisme φ_k :

- $\forall i \in [|0, 2k-1|], \varphi_k(a_i) = a_0 b_i a_1 b_{i+1} \ldots a_{k-1} b_{i+k-1}$
- $\forall i \in [|0, 2k-1|], \varphi_k(b_i) = a_k b_i a_{k+1} b_{i+1} \ldots a_{2k-1} b_{i+k-1}$.

Ce mot vérifie que pour chacun de ses facteur v de longueur 2, $\exists i_v \in \mathbb{Z}/4k\mathbb{Z}$ et x_v une lettre : $\forall n \in \mathbb{N}$ tels que, si v est facteur en position n :

1. (i) $n \equiv i_v [4k]$
2. (ii) $\omega^{(k)}_{\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor} = x_v$

Cela signifie donc qu'à partir d'un facteur de longueur 2 de $\omega^{(k)}$, on peut trouver la lettre x générant le bloc de longueur $2k$ de $\omega^{(k)}$ où il commence et sa position dans celui-ci. On dit que ce facteur reconnaît le mot $\varphi_k(x)$.
Cette propriété de repérage permet de montrer le lemme suivant :

Lemme

Si p est un motif à moins de 2k variables et v un facteur de $\omega^{(k)}$ tel que $\varphi_k(v)$ n'évite pas p, alors il existe un motif q tel que v n'évite pas q et que p se réduit à q.

Ce lemme implique immédiatement le sens réciproque du théorème.

Idées de la preuve : ce lemme signifie qu'on peut "remonter" le motif p dans v. Puisque $\varphi_k(v)$ n'évite pas p : $\exists\mu$ non-effaçant : $\mu(p)$ est facteur de $\varphi_k v$. Posons x une lettre de $\omega^{(k)}$.Par les propriété de repérage : il existe exactement $2k$ facteurs de ce mot reconnaissant $\varphi_k(x)$.
La définition de $\omega^{(k)}$ assure qu'ils se terminent tous par des lettres différentes : on en choisit un, d_x, dont la dernière lettre n'est facteur d'aucun $\mu(\zeta)$. Alors si d_x est facteur de $\mu(u)$, il est facteur de $\mu(\zeta)$ pour ζ lettre de u. On l'appelle mot décisif de x.

On pose donc q le motif obtenu en retirant à p toutes les variables ζ telles que $\mu(\zeta)$ ne contienne pas de mot décisif, et ν le morphisme qui à une lettre ξ de q associe le mot $x_1 ... x_n$ où $d_{x_1} ... d_{x_n}$ sont les mots décisifs facteurs de $\mu(\zeta)$ dans cet ordre. Les propriétés de ces mots montrent directement que $\nu(q)$ est facteur de v.

On pose donc q le motif obtenu en retirant à p toutes les variables ζ telles que $\mu(\zeta)$ ne contienne pas de mot décisif, et ν le morphisme qui à une lettre ξ de q associe le mot $x_1 \ldots x_n$ où $d_{x_1} \ldots d_{x_n}$ sont les mots décisifs facteurs de $\mu(\zeta)$ dans cet ordre. Les propriétés de ces mots montrent directement que $\nu(q)$ est facteur de v.

Par contre, il n'y a a priori aucune raison pour que les variables retirées forment un ensemble libre, et donc aucune pour que p se réduise à q.

On pose donc q le motif obtenu en retirant à p toutes les variables ζ telles que $\mu(\zeta)$ ne contienne pas de mot décisif, et ν le morphisme qui à une lettre ξ de q associe le mot $x_1 \ldots x_n$ où $d_{x_1} \ldots d_{x_n}$ sont les mots décisifs facteurs de $\mu(\zeta)$ dans cet ordre. Les propriétés de ces mots montrent directement que $\nu(q)$ est facteur de v.

Par contre, il n'y a a priori aucune raison pour que les variables retirées forment un ensemble libre, et donc aucune pour que p se réduise à q.
Cela découle de lemmes montrant que, donnés un morphisme vérifiant certaine propriétés relativement à p et q, on a p qui se réduit à q, et de l'exhibition d'un tel morphisme.

Ce lemme à un corollaire intéressant :

Corollaire

Soit p un motif à moins de $2k-1$ variables :

- *Ou bien $\omega^{(k)}$ évite p, c'est-à-dire p est évitable sur un alphabet de taille $4k$*
- *Ou bien p est inévitable.*

Corollaires de l'équivalence réductibilité-inévitabilité

On déduit facilement de cette équivalence les deux résultats suivants :

Corollaire 1

Un motif inévitable possède une variable qui n'apparaît qu'une fois.

Corollaire 2

Un motif inévitable avec n variables est de longueur inférieure à $2^n - 1$.