Le Théorème de Cardinalité

LFCC

Miguel Acosta

6 janvier 2011

Rappels / Notations

- Alphabet : $\{0, 1\}$
- On identifie $\{0, 1\}^*$ et $\mathbb{N}$ par l'écriture en base 2
- Langages décidables ou récursifs
- Langages récursivement énumérables
- Machines déterministes

Rappels / Notations

- Alphabet : $\{0, 1\}$
- On identifie $\{0, 1\}^*$ et $\mathbb{N}$ par l'écriture en base 2
- Langages décidables ou récursifs
- Langages récursivement énumérables
- Machines déterministes

Rappels / Notations

- Alphabet : $\{0,1\}$
- On identifie $\{0,1\}^*$ et $\mathbb{N}$ par l'écriture en base 2
- Langages décidables ou récursifs
- Langages récursivement énumérables
- Machines déterministes

Rappels / Notations

- Alphabet : $\{0, 1\}$
- On identifie $\{0, 1\}^*$ et $\mathbb{N}$ par l'écriture en base 2
- Langages décidables ou récursifs
- Langages récursivement énumérables
- Machines déterministes

Rappels / Notations

- Alphabet : $\{0,1\}$
- On identifie $\{0,1\}^*$ et $\mathbb{N}$ par l'écriture en base 2
- Langages décidables ou récursifs
- Langages récursivement énumérables
- Machines déterministes

Rappels / Notations

- Alphabet : $\{0,1\}$
- On identifie $\{0,1\}^*$ et $\mathbb{N}$ par l'écriture en base 2
- Langages décidables ou récursifs
- Langages récursivement énumérables
- Machines déterministes

Machines avec oracle

Définition

Soit $B \subseteq \mathbb{N}$. Une machine à oracle $M^{(B)}$ est une machine de Turing à plusieurs bandes, dont une bande "oracle", qui est initialisée avec $\chi_B(i)$ sur la $i^{\text{ème}}$ position et sur laquelle la machine n'écrit pas.

- Hiérarchiser les langages sur $\{0,1\}^*$

Définition

Soit $B \subseteq \mathbb{N}$. Une fonction f est calculée avec l'oracle B s'il existe une machine avec oracle $M^{(B)}$ qui, avec l'entrée x, écrit sur sa bande de sortie $f(x)$ et arrive dans un état final.

Machines avec oracle

Définition

Soit $B \subseteq \mathbb{N}$. Une machine à oracle $M^{(B)}$ est une machine de Turing à plusieurs bandes, dont une bande "oracle", qui est initialisée avec $\chi_B(i)$ sur la $i^{\text{ème}}$ position et sur laquelle la machine n'écrit pas.

- Hiérarchiser les langages sur $\{0,1\}^*$

Définition

Soit $B \subseteq \mathbb{N}$. Une fonction f est calculée avec l'oracle B s'il existe une machine avec oracle $M^{(B)}$ qui, avec l'entrée x, écrit sur sa bande de sortie $f(x)$ et arrive dans un état final.

Machines avec oracle

Définition

Soit $B \subseteq \mathbb{N}$. Une machine à oracle $M^{(B)}$ est une machine de Turing à plusieurs bandes, dont une bande "oracle", qui est initialisée avec $\chi_B(i)$ sur la $i^{\text{ème}}$ position et sur laquelle la machine n'écrit pas.

- Hiérarchiser les langages sur $\{0, 1\}^*$

Définition

Soit $B \subseteq \mathbb{N}$. Une fonction f est calculée avec l'oracle B s'il existe une machine avec oracle $M^{(B)}$ qui, avec l'entrée x, écrit sur sa bande de sortie $f(x)$ et arrive dans un état final.

Machines avec oracle

Définition

Soit $B \subseteq \mathbb{N}$. Une machine à oracle $M^{(B)}$ est une machine de Turing à plusieurs bandes, dont une bande "oracle", qui est initialisée avec $\chi_B(i)$ sur la $i^{\text{ème}}$ position et sur laquelle la machine n'écrit pas.

- Hiérarchiser les langages sur $\{0,1\}^*$

Définition

Soit $B \subseteq \mathbb{N}$. Une fonction f est calculée avec l'oracle B s'il existe une machine avec oracle $M^{(B)}$ qui, avec l'entrée x, écrit sur sa bande de sortie $f(x)$ et arrive dans un état final.

La conjecture de cardinalité de Beigel

Définition

Soient $A \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note

$$\#_n^A : \begin{array}{l} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto Card\{i \in [|1, n|] \mid x_i \in A\} = \sum_{i=0}^{n} \chi_A(x_i) \end{array} .$$

Conjecture (Conjecture de Cardinalité de Beigel)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $\#_{2^n}^A$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle, alors A est récursif.

La conjecture de cardinalité de Beigel

Définition

Soient $A \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note

$$\#_n^A : \begin{array}{l} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto Card\{i \in [|1, n|] \mid x_i \in A\} = \sum_{i=0}^{n} \chi_A(x_i) \end{array} .$$

Conjecture (Conjecture de Cardinalité de Beigel)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $\#_{2^n}^A$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle, alors A est récursif.

La conjecture de cardinalité de Beigel

Définition

Soient $A \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note

$$\#_n^A : \begin{array}{l} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto Card\{i \in [|1, n|] \mid x_i \in A\} = \sum_{i=0}^{n} \chi_A(x_i) \end{array} .$$

Conjecture (Conjecture de Cardinalité de Beigel)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $\#_{2^n}^A$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle, alors A est récursif.

Remarques

Conjecture (Conjecture de Cardinalité de Beigel)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $\#^{A}_{2^n}$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle, alors A est récursif.

- n est quelconque
- On ne fait pas d'hypothèses sur B

Remarques

Conjecture (Conjecture de Cardinalité de Beigel)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $\#_{2^n}^A$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle, alors A est récursif.

- n est quelconque
- On ne fait pas d'hypothèses sur B

Remarques

Conjecture (Conjecture de Cardinalité de Beigel)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $\#^A_{2^n}$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle, alors A est récursif.

- n est quelconque
- On ne fait pas d'hypothèses sur B

Le Théorème de Cardinalité

Définition

Soit $i \in \mathbb{N}$. On note W_i le langage (identifié à une partie de $\mathbb{N}$) reconnu par la machine de Turing d'indice i.

Théorème (Kummer 1992)

Soient $A \subseteq \mathbb{N}$ et $m \geq 1$. On suppose qu'il existe une fonction récursive $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout m-uplet $(x_1, \ldots, x_m)$ d'entiers naturels distincts :

1. $W_{g(x_1,\ldots,x_m)} \subsetneq [|0, m|]$
2. $\#^A_m(x_1, \ldots, x_m) \in W_{g(x_1,\ldots,x_m)}$

Alors A est récursif.

Le Théorème de Cardinalité

Définition

Soit $i \in \mathbb{N}$. On note W_i le langage (identifié à une partie de $\mathbb{N}$) reconnu par la machine de Turing d'indice i.

Théorème (Kummer 1992)

Soient $A \subseteq \mathbb{N}$ et $m \geq 1$. On suppose qu'il existe une fonction récursive $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout m-uplet $(x_1, \ldots, x_m)$ d'entiers naturels distincts :

1. $W_{g(x_1,\ldots,x_m)} \subsetneq [|0, m|]$
2. $\#_m^A(x_1, \ldots, x_m) \in W_{g(x_1,\ldots,x_m)}$

Alors A est récursif.

Le Théorème de Cardinalité

Définition

Soit $i \in \mathbb{N}$. On note W_i le langage (identifié à une partie de $\mathbb{N}$) reconnu par la machine de Turing d'indice i.

Théorème (Kummer 1992)

Soient $A \subseteq \mathbb{N}$ et $m \geq 1$. On suppose qu'il existe une fonction récursive $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout m-uplet $(x_1, \ldots, x_m)$ d'entiers naturels distincts :

1. $W_{g(x_1,\ldots,x_m)} \subsetneq [|0, m|]$
2. $\#_m^A(x_1, \ldots, x_m) \in W_{g(x_1,\ldots,x_m)}$

Alors A est récursif.

Théorème de Cardinalité $\Longrightarrow$ Conjecture de Beigel

- $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\#^A_{2^n}$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle.
- $m = 2^n$
- Pour $w \in \{0,1\}^n$, M_w, calculant h_w, qui simule $M^{(B)}$ mais qui, au $k^{\text{ème}}$ appel de l'oracle, répond par $w(k)$
- g r.e. telle que $W_{g(x_1,\ldots,x_m)} = \{h_w(x_1,\ldots,x_m) \mid w \in [|0,m|]\} \cap [|0,m|]$.
- Pour chaque entrée $(x_1,\ldots,x_m)$ il existe $w \in \{0,1\}^n$ tel que $\#^A_{2^n}(x_1,\ldots,x_m) = h_w(x_1,\ldots,x_m)$
- Pour tout m-uplet $(x_1,\ldots,x_m)$, que $W_{g(x_1\ldots x_m)} \subsetneq [|0,m|]$ et $\#^A_m(x_1,\ldots x_m) \in W_{g(x_1\ldots x_m)}$

Théorème de Cardinalité $\Longrightarrow$ Conjecture de Beigel

- $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\#^A_{2^n}$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle.
- $m = 2^n$
- Pour $w \in \{0,1\}^n$, M_w, calculant h_w, qui simule $M^{(B)}$ mais qui, au $k^{\text{ème}}$ appel de l'oracle, répond par $w(k)$
- g r.e. telle que $W_{g(x_1,\ldots,x_m)} = \{h_w(x_1,\ldots,x_m) \mid w \in [|0,m|]\} \cap [|0,m|]$.
- Pour chaque entrée $(x_1,\ldots,x_m)$ il existe $w \in \{0,1\}^n$ tel que $\#^A_{2^n}(x_1,\ldots,x_m) = h_w(x_1,\ldots,x_m)$
- Pour tout m-uplet $(x_1,\ldots,x_m)$, que $W_{g(x_1\ldots x_m)} \subsetneq [|0,m|]$ et $\#^A_m(x_1,\ldots x_m) \in W_{g(x_1\ldots x_m)}$

Théorème de Cardinalité $\implies$ Conjecture de Beigel

- $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\#^A_{2^n}$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle.
- $m = 2^n$
- Pour $w \in \{0,1\}^n$, M_w, calculant h_w, qui simule $M^{(B)}$ mais qui, au $k^{\text{ème}}$ appel de l'oracle, répond par $w(k)$
- g r.e. telle que $W_{g(x_1,\ldots,x_m)} = \{h_w(x_1,\ldots,x_m) \mid w \in [|0,m|]\} \cap [|0,m|]$.
- Pour chaque entrée $(x_1,\ldots,x_m)$ il existe $w \in \{0,1\}^n$ tel que $\#^A_{2^n}(x_1,\ldots,x_m) = h_w(x_1,\ldots,x_m)$
- Pour tout m-uplet $(x_1,\ldots,x_m)$, que $W_{g(x_1\ldots x_m)} \subsetneq [|0,m|]$ et $\#^A_m(x_1,\ldots x_m) \in W_{g(x_1\ldots x_m)}$

Théorème de Cardinalité $\implies$ Conjecture de Beigel

- $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\#^A_{2^n}$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle.
- $m = 2^n$
- Pour $w \in \{0,1\}^n$, M_w, calculant h_w, qui simule $M^{(B)}$ mais qui, au $k^{\text{ème}}$ appel de l'oracle, répond par $w(k)$
- g r.e. telle que $W_{g(x_1,\ldots,x_m)} = \{h_w(x_1,\ldots,x_m) \mid w \in [|0,m|]\} \cap [|0,m|]$.
- Pour chaque entrée $(x_1,\ldots,x_m)$ il existe $w \in \{0,1\}^n$ tel que $\#^A_{2^n}(x_1,\ldots,x_m) = h_w(x_1,\ldots,x_m)$
- Pour tout m-uplet $(x_1,\ldots,x_m)$, que $W_{g(x_1\ldots x_m)} \subsetneq [|0,m|]$ et $\#^A_m(x_1,\ldots x_m) \in W_{g(x_1\ldots x_m)}$

Théorème de Cardinalité $\Longrightarrow$ Conjecture de Beigel

- $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\#_{2^n}^{A}$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle.
- $m = 2^n$
- Pour $w \in \{0,1\}^n$, M_w, calculant h_w, qui simule $M^{(B)}$ mais qui, au $k^{\text{ème}}$ appel de l'oracle, répond par $w(k)$
- g r.e. telle que $W_{g(x_1,\ldots,x_m)} = \{h_w(x_1,\ldots,x_m) \mid w \in [|0,m|]\} \cap [|0,m|]$.
- Pour chaque entrée $(x_1,\ldots,x_m)$ il existe $w \in \{0,1\}^n$ tel que $\#_{2^n}^{A}(x_1,\ldots,x_m) = h_w(x_1,\ldots,x_m)$
- Pour tout m-uplet $(x_1,\ldots,x_m)$, que $W_{g(x_1 \ldots x_m)} \subsetneq [|0,m|]$ et $\#_m^A(x_1,\ldots x_m) \in W_{g(x_1 \ldots x_m)}$

Théorème de Cardinalité $\Longrightarrow$ Conjecture de Beigel

- $A, B \subseteq \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\#^A_{2^n}$ est calculable par une machine de Turing $M^{(B)}$ en faisant au plus n appels à l'oracle.
- $m = 2^n$
- Pour $w \in \{0,1\}^n$, M_w, calculant h_w, qui simule $M^{(B)}$ mais qui, au $k^{\text{ème}}$ appel de l'oracle, répond par $w(k)$
- g r.e. telle que $W_{g(x_1,\ldots,x_m)} = \{h_w(x_1,\ldots,x_m) \mid w \in [|0,m|]\} \cap [|0,m|]$.
- Pour chaque entrée $(x_1,\ldots,x_m)$ il existe $w \in \{0,1\}^n$ tel que $\#^A_{2^n}(x_1,\ldots,x_m) = h_w(x_1,\ldots,x_m)$
- Pour tout m-uplet $(x_1,\ldots,x_m)$, que $W_{g(x_1\ldots x_m)} \subsetneq [|0,m|]$ et $\#^A_m(x_1,\ldots x_m) \in W_{g(x_1\ldots x_m)}$

Notations

Définition

1. On note ϵ le mot vide et, si $s \in \{0,1\}^*$, $|s|$ dénote la longueur de s, de sorte que $|\epsilon| = 0$.
2. Si $s, t \in \{0,1\}^*$ on note $s \sqsubseteq t$ si s est un préfixe de t, et $s * t$ la concaténation de s et t.
3. Si $s \in \{0,1\}^*$ et $n \leq |s|$, $s(n)$ dénote la $n^{\text{ème}}$ lettre de s.

Notations

Définition

1. On note ϵ le mot vide et, si $s \in \{0,1\}^*$, $|s|$ dénote la longueur de s, de sorte que $|\epsilon| = 0$.
2. Si $s, t \in \{0,1\}^*$ on note $s \sqsubseteq t$ si s est un préfixe de t, et $s * t$ la concaténation de s et t.
3. Si $s \in \{0,1\}^*$ et $n \leq |s|$, $s(n)$ dénote la $n^{\text{ème}}$ lettre de s.

Notations

Définition

1. On note ϵ le mot vide et, si $s \in \{0,1\}^*$, $|s|$ dénote la longueur de s, de sorte que $|\epsilon| = 0$.
2. Si $s, t \in \{0,1\}^*$ on note $s \sqsubseteq t$ si s est un préfixe de t, et $s * t$ la concaténation de s et t.
3. Si $s \in \{0,1\}^*$ et $n \leq |s|$, $s(n)$ dénote la $n^{\text{ème}}$ lettre de s.

Notations

Définition

1. On note ϵ le mot vide et, si $s \in \{0,1\}^*$, $|s|$ dénote la longueur de s, de sorte que $|\epsilon| = 0$.
2. Si $s, t \in \{0,1\}^*$ on note $s \sqsubseteq t$ si s est un préfixe de t, et $s * t$ la concaténation de s et t.
3. Si $s \in \{0,1\}^*$ et $n \leq |s|$, $s(n)$ dénote la $n^{\text{ème}}$ lettre de s.

Arbres

Définition

Un arbre est un sous-ensemble T de $\{0,1\}^*$ stable par préfixes. $t \in T$ est un noeud de T, $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est une branche de T si tout segment initial de u est dans T.

Définition

On note, pour $k \in \mathbb{N}$, B_k l'arbre complet de hauteur k.

Arbres

Définition

Un arbre est un sous-ensemble T de $\{0,1\}^*$ stable par préfixes. $t \in T$ est un noeud de T, $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est une branche de T si tout segment initial de u est dans T.

Définition

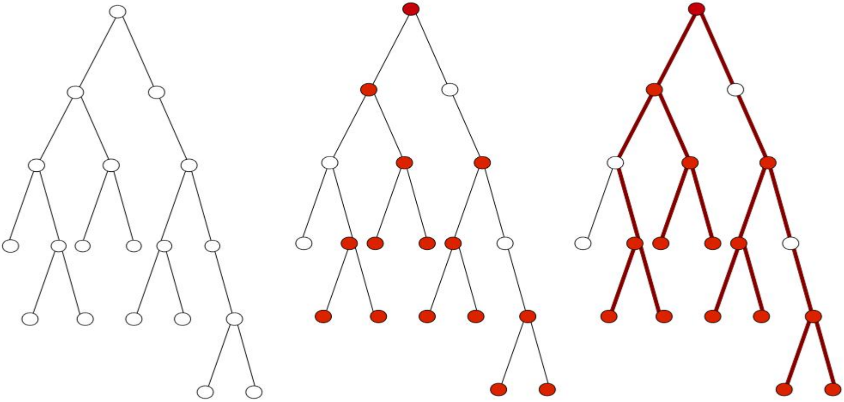
On note, pour $k \in \mathbb{N}$, B_k l'arbre complet de hauteur k.

Arbres - Plongement

Définition

Soient $k \in \mathbb{N}$ et T un arbre. Un plongement de B_k dans T est une fonction $f : B_k \to T$ telle que, pour tout $s \in B_k$ tel que $|s| < k$ on ait $f(s) * 0 \sqsubseteq f(s * 0)$ et $f(s) * 1 \sqsubseteq f(s * 1)$. B_k est plongeable au-dessus de $e \in T$ s'il existe un plongement f de B_k dans T tel que $f(\epsilon) = e$.

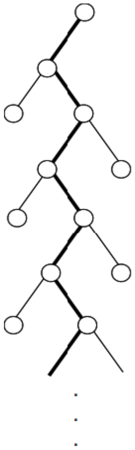
Arbres - Plongement



Arbres - Rang

Définition

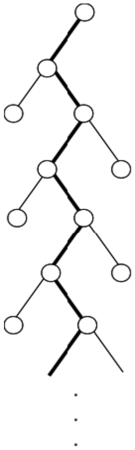
Soit T un arbre. On appelle rang de T le sup des $n \in \mathbb{N}$ tels que B_n se plonge dans T. Si T est de rang fini, on le note $\mathrm{rk}(T)$.



Arbres - Rang

Définition

Soit T un arbre. On appelle rang de T le sup des $n \in \mathbb{N}$ tels que B_n se plonge dans T. Si T est de rang fini, on le note $\mathrm{rk}(T)$.



Lemmes préliminaires

Lemme (1)

Soit T un arbre récusivement énumérable de rang fini. Alors toute branche de T est récursive.

Lemmes préliminaires

Lemme (2)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout 2-coloriage de B_{2k}, il existe un plongement g de B_k dans B_{2k} tel que tous les noeuds de $g(B_k)$ aient la même couleur.

Lemmes préliminaires

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [|1, 2n-1|]$ on définit récursivement h par :

- $h(n, 2n-1) = 0$
- $h(n, i-1) = 2(h(n,i)+1) = 2(2^{n-i}-1) = 2^{2n-(i-1)}$

Puis $k(n) = h(n,0) = 4^n - 2$

Lemme (3)

Soit T un arbre tel que $B_{k(n)}$ se plonge dans T par f_0. Alors il existe des noeuds $t_1, \ldots, t_{n+1}$ de T, $x_1 < \cdots < x_n$ et $b \in 0,1$ tels que pour tous $j \in [|1,n|]$, $k \in [|1, n+1|]$:

$$t_k(x_j) = \begin{cases} 1-b & \text{si} \quad j < k \\ b & \text{si} \quad j \geq k \end{cases}$$

Lemmes préliminaires

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [|1, 2n-1|]$ on définit récursivement h par :

- $h(n, 2n-1) = 0$
- $h(n, i-1) = 2(h(n,i)+1) = 2(2^{n-i}-1) = 2^{2n-(i-1)}$

Puis $k(n) = h(n, 0) = 4^n - 2$

Lemme (3)

Soit T un arbre tel que $B_{k(n)}$ se plonge dans T par f_0. Alors il existe des noeuds $t_1, \dots, t_{n+1}$ de T, $x_1 < \cdots < x_n$ et $b \in 0, 1$ tels que pour tous $j \in [|1, n|]$, $k \in [|1, n+1|]$:

$$t_k(x_j) = \begin{cases} 1 - b & \text{si} \quad j < k \\ b & \text{si} \quad j \geq k \end{cases}$$

Preuve (0)

Théorème (Kummer 1992)

Soient $A \subseteq \mathbb{N}$ et $m \geq 1$. On suppose qu'il existe une fonction récursive $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout m-uplet $(x_1, \ldots, x_m)$ d'entiers naturels distincts :

1. $W_{g(x_1,\ldots,x_m)} \subsetneq [|0, m|]$
2. $\#_m^A(x_1, \ldots, x_m) \in W_{g(x_1,\ldots,x_m)}$

Alors A est récursif.

Preuve (1)

- $T_g = \{t \in \{0,1\}^* \mid \forall x_1, \ldots, x_m$ $x_1 < \cdots < x_m < |t| \implies \sum_{i=1}^{m} t(x_i) \in W_{g(x_1,\ldots,x_n)}\}$
- T_g récursivement énumérable
- χ_A est une branche de T_g
- Il suffit de montrer que T_g est de rang fini (Lemme 1)

Preuve (1)

- $T_g = \{t \in \{0,1\}^* \mid \forall x_1, \ldots, x_m$
  $x_1 < \cdots < x_m < |t| \implies \sum_{i=1}^{m} t(x_i) \in W_{g(x_1,\ldots,x_n)}\}$
- T_g récursivement énumérable
- χ_A est une branche de T_g
- Il suffit de montrer que T_g est de rang fini (Lemme 1)

Preuve (1)

- $T_g = \{t \in \{0,1\}^* \mid \forall x_1, \ldots, x_m$ $x_1 < \cdots < x_m < |t| \implies \sum_{i=1}^{m} t(x_i) \in W_{g(x_1,\ldots,x_n)}\}$
- T_g récursivement énumérable
- χ_A est une branche de T_g
- Il suffit de montrer que T_g est de rang fini (Lemme 1)

Preuve (1)

- $T_g = \{t \in \{0,1\}^* \mid \forall x_1, \ldots, x_m$
  $x_1 < \cdots < x_m < |t| \implies \sum_{i=1}^{m} t(x_i) \in W_{g(x_1,\ldots,x_n)}\}$
- T_g récursivement énumérable
- χ_A est une branche de T_g
- Il suffit de montrer que T_g est de rang fini (Lemme 1)

Preuve (1)

- $T_g = \{t \in \{0,1\}^* \mid \forall x_1, \ldots, x_m$ $x_1 < \cdots < x_m < |t| \implies \sum_{i=1}^{m} t(x_i) \in W_{g(x_1,\ldots,x_n)}\}$
- T_g récursivement énumérable
- χ_A est une branche de T_g
- Il suffit de montrer que T_g est de rang fini (Lemme 1)

Preuve (2)

- Sinon, on peut plonger $B_{k(m)}$ dans T_g
- Il existe des noeuds $t_1, \ldots, t_{m+1}$ de T_g, $x_1 < \cdots < x_m$ et $b \in 0, 1$ tels que pour tous $j \in [|1, m|]$, $k \in [|1, m+1|]$:
$$t_k(x_j) = \begin{cases} 1 - b & \text{si} \quad j < k \\ b & \text{si} \quad j \geq k \end{cases}$$
(Lemme 3)
- Il existe $k \in [|0, m|]$ tel que $k \notin W_{g(x_1, \ldots x_m)}$. Mais alors, si $b = 0$, $\sum_{j=1}^{m} t_k(x_j) = k$, et, si $b = 1$, $\sum_{j=1}^{m} t_{m+1-k}(x_j) = k$
- Absurde

Preuve (2)

- Sinon, on peut plonger $B_{k(m)}$ dans T_g
- Il existe des noeuds $t_1, \ldots, t_{m+1}$ de T_g, $x_1 < \cdots < x_m$ et $b \in 0, 1$ tels que pour tous $j \in [|1, m|]$, $k \in [|1, m+1|]$:
  $t_k(x_j) = \begin{cases} 1 - b & \text{si} \quad j < k \\ b & \text{si} \quad j \geq k \end{cases}$
  (Lemme 3)
- Il existe $k \in [|0, m|]$ tel que $k \notin W_{g(x_1, \ldots x_m)}$. Mais alors, si $b = 0$, $\sum_{j=1}^{m} t_k(x_j) = k$, et, si $b = 1$, $\sum_{j=1}^{m} t_{m+1-k}(x_j) = k$
- Absurde

Preuve (2)

- Sinon, on peut plonger $B_{k(m)}$ dans T_g
- Il existe des noeuds $t_1, \ldots, t_{m+1}$ de T_g, $x_1 < \cdots < x_m$ et $b \in 0, 1$ tels que pour tous $j \in [|1, m|]$, $k \in [|1, m+1|]$:
$$t_k(x_j) = \begin{cases} 1 - b & \text{si} \quad j < k \\ b & \text{si} \quad j \geq k \end{cases}$$
(Lemme 3)
- Il existe $k \in [|0, m|]$ tel que $k \notin W_{g(x_1, \ldots x_m)}$. Mais alors, si $b = 0$, $\sum_{j=1}^{m} t_k(x_j) = k$, et, si $b = 1$, $\sum_{j=1}^{m} t_{m+1-k}(x_j) = k$
- Absurde

Preuve (2)

- Sinon, on peut plonger $B_{k(m)}$ dans T_g
- Il existe des noeuds $t_1, \ldots, t_{m+1}$ de T_g, $x_1 < \cdots < x_m$ et $b \in 0, 1$ tels que pour tous $j \in [|1, m|]$, $k \in [|1, m+1|]$:
$$t_k(x_j) = \begin{cases} 1-b & \text{si} \quad j < k \\ b & \text{si} \quad j \geq k \end{cases}$$
(Lemme 3)
- Il existe $k \in [|0, m|]$ tel que $k \notin W_{g(x_1, \ldots x_m)}$. Mais alors, si $b = 0$, $\sum_{j=1}^{m} t_k(x_j) = k$, et, si $b = 1$, $\sum_{j=1}^{m} t_{m+1-k}(x_j) = k$
- Absurde

Preuve (2)

- Sinon, on peut plonger $B_{k(m)}$ dans T_g
- Il existe des noeuds $t_1, \dots, t_{m+1}$ de T_g, $x_1 < \dots < x_m$ et $b \in 0, 1$ tels que pour tous $j \in [|1, m|]$, $k \in [|1, m+1|]$:
  $$t_k(x_j) = \begin{cases} 1 - b & \text{si} \quad j < k \\ b & \text{si} \quad j \geq k \end{cases}$$
  (Lemme 3)
- Il existe $k \in [|0, m|]$ tel que $k \notin W_{g(x_1, \dots x_m)}$. Mais alors, si $b = 0$, $\sum_{j=1}^{m} t_k(x_j) = k$, et, si $b = 1$, $\sum_{j=1}^{m} t_{m+1-k}(x_j) = k$
- Absurde