Simulation d'une machine de Turing à k bandes en $O(T(n))$ par une MT à deux bandes en $O(T(n) \log T(n))$

Quentin de Mourgues

20 janvier 2011

Théorème

Soit M_1 une machine de Turing à k bandes reconnaissant le langage L en temps $T(n)$, Alors il existe une machine de Turing à une bande M_2 qui reconnait L en $O(T(n)^2)$.

Remarque

Cette borne est optimale et atteinte pour le cas des palindromes.
Cf référence [1] exercice 1 et 2 du chapitre 12

									↓	
Bande 4	d_{-8}	d_{-7}	d_{-6}	d_{-5}	d_{-4}	d_{-3}	d_{-2}	d_{-1}	d_0	d_1
				↓						
Bande 3	c_{-3}	c_{-2}	c_{-1}	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
		↓								
Bande 2	b_{-1}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
						↓				
Bande 1	a_{-5}	a_{-4}	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4

FIG.: $M1$ MT à 4 bandes sur alphabet Γ

		↓									
Bande 1	E4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
		d_{-8}	d_{-7}	d_{-6}	d_{-5}	d_{-4}	d_{-3}	d_{-2}	d_{-1}	d_0	d_1
	E3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
		c_{-3}	c_{-2}	c_{-1}	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
	E2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
		b_{-1}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	E1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
		a_{-5}	a_{-4}	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4

FIG.: $M1'$ MT à 1 bande sur alphabet $(\Gamma \times \{0, 1\})^4$

Une transition de $M1$ se simule sur $M2$ en $O(T(n))$

- Un parcours de la bande de la gauche vers la droite pour trouver la transition à effectuer
- Un parcours de la bande de la droite vers la gauche pour mettre à jour la bande

Théorème

Soit M_1 *une machine de Turing à* k *bandes reconnaissant le langage* L *en temps* $T(n)$ *, Alors il existe une machine de Turing à deux bandes* M_2 *qui reconnait* L *en* $O(T(n) \log T(n))$.

Bande 2																		
Bande 1	E4																	
		d_{-8}	d_{-7}	d_{-6}	d_{-5}	d_{-4}	d_{-3}	d_{-2}	d_{-1}	d_0	d_1							
	E3																	
							c_{-3}	c_{-2}	c_{-1}	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6		
	E2																	
									b_{-1}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	E1																	
					a_{-5}	a_{-4}	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4				
										$\overbrace{}^{}$ B_0								

FIG.: M_2 Machine de Turing à 2 bandes d'alphabets $(\Gamma^2)^4$ et Γ simulant M_1, il suffit que la tête de bande soit placée en B_0 pour décider de la transition

- On choisit la transition à effecter en temps $O(1)$
- il faut maintenant trouver un algorithme pour mettre à jour un étage en $O(\log(T(n))$ amorti
- On répète alors k fois l'algorithme pour mettre à jour chaque étage (k est une constante du problème)

On divise la bande 1 en une infinité de blocs $\ldots, B_{-k}, \ldots, B_{-1}, B_0, B_1, \ldots, B_k, \ldots$ de taille croissante exponentielle : B_0 a pour taille 1 et $\forall k \in \mathbb{Z}^*$ B_k a pour taille $2^{|k|-1}$.

E1															
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7

$$\underbrace{a_{-7}\,a_{-6}\,a_{-5}\,a_{-4}}_{B_{-3}}\;\underbrace{a_{-3}\,a_{-2}}_{B_{-2}}\;\underbrace{a_{-1}}_{B_{-1}}\;\underbrace{a_0}_{B_0}\;\underbrace{a_1}_{B_1}\;\underbrace{a_2\,a_3}_{B_2}\;\underbrace{a_4\,a_5\,a_6\,a_7}_{B_3}$$

FIG.: Les blocs sur la bande 1 de M_2

Et on conserve l'invariant suivant :

Invariant

1. $\forall k > 0$
   - B_k a ses deux niveaux remplis et B_{-k} est vide

E1								γ	a_{-2}	a_0	a_1				
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}				a_{-3}	a_{-1}	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7

B_{-3} B_{-2} B_{-1} B_0 B_1 B_2 B_3

FIG.: Une configuration de la bande vérifiant l'invariant

Invariant

1. $\forall k > 0$
   - B_k a ses deux niveaux remplis et B_{-k} est vide
   - B_{-k} a ses deux niveaux remplis et B_k est vide

E1								γ	a_{-2}	a_0	a_1				
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}				a_{-3}	a_{-1}	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			

FIG.: Une configuration de la bande vérifiant l'invariant

Invariant

1. $\forall k > 0$
   - B_k a ses deux niveaux remplis et B_{-k} est vide
   - B_{-k} a ses deux niveaux remplis et B_k est vide
   - B_{-k} et B_k ont leur premier niveau rempli et leur second niveau vide

E1								γ	a_{-2}	a_0	a_1				
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}				a_{-3}	a_{-1}	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			

FIG.: Une configuration de la bande vérifiant l'invariant

Invariant

1. $\forall k > 0$
   - B_k a ses deux niveaux remplis et B_{-k} est vide
   - B_{-k} a ses deux niveaux remplis et B_k est vide
   - B_{-k} et B_k ont leur premier niveau rempli et leur second niveau vide
2. - $\forall k > 0$ le second niveau de B_k contient les symboles à gauche de ceux du premier niveau

E1								γ	a_{-2}	a_0	a_1				
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}				a_{-3}	a_{-1}	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			

Fig.: Une configuration de la bande vérifiant l'invariant

Invariant

1. $\forall k > 0$
   - B_k a ses deux niveaux remplis et B_{-k} est vide
   - B_{-k} a ses deux niveaux remplis et B_k est vide
   - B_{-k} et B_k ont leur premier niveau rempli et leur second niveau vide
2. - $\forall k > 0$ le second niveau de B_k contient les symboles à gauche de ceux du premier niveau
     $\forall k < 0$ le second niveau de B_k contient les symboles à droite de ceux du premier niveau

E1								γ	a_{-2}	a_0	a_1				
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}				a_{-3}	a_{-1}	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			

FIG.: Une configuration de la bande vérifiant l'invariant

Invariant

1. $\forall k > 0$
   - B_k a ses deux niveaux remplis et B_{-k} est vide
   - B_{-k} a ses deux niveaux remplis et B_k est vide
   - B_{-k} et B_k ont leur premier niveau rempli et leur second niveau vide
2. - $\forall k > 0$ le second niveau de B_k contient les symboles à gauche de ceux du premier niveau
     $\forall k < 0$ le second niveau de B_k contient les symboles à droite de ceux du premier niveau
3. $\forall i < j$ B_i contient des symboles à gauche de ceux contenus par B_j

E1								γ	a_{-2}	a_0	a_1				
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}				a_{-3}	a_{-1}	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			

Fig.: Une configuration de la bande vérifiant l'invariant

Invariant

1. $\forall k > 0$
   - B_k a ses deux niveaux remplis et B_{-k} est vide
   - B_{-k} a ses deux niveaux remplis et B_k est vide
   - B_{-k} et B_k ont leur premier niveau rempli et leur second niveau vide
2. - $\forall k > 0$ le second niveau de B_k contient les symboles à gauche de ceux du premier niveau
     $\forall k < 0$ le second niveau de B_k contient les symboles à droite de ceux du premier niveau
3. $\forall i < j$ B_i contient des symboles à gauche de ceux contenus par B_j
4. B_0 a un symbole spécial sur son second niveau

E1								γ	a_{-2}	a_0	a_1				
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}				a_{-3}	a_{-1}	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			

FIG.: Une configuration de la bande vérifiant l'invariant

Conservation de l'invariant

1. On déplace la tête de lecture de la bande 1 (qui se trouve en B_0) vers la droite jusqu'à trouver le premier bloc non plein B_i.
2. On recopie alors grace à la bande 2 de M_2, les données contenues dans $B_0 \ldots B_{k-1}$ dans les premiers niveaux de $B_1 \ldots B_{k-1}$ ainsi que le premier niveau de B_k si celui-ci est vide sinon dans son second niveau.

								$\downarrow$							
E1								γ	a_{-2}	a_0	a_1				
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}				a_{-3}	a_{-1}	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			

	$\downarrow$														
Bd 2															

Conservation de l'invariant

1. On déplace la tête de lecture de la bande 1 (qui se trouve en B_0) vers la droite jusqu'à trouver le premier bloc non plein B_i.
2. On recopie alors grace à la bande 2 de M_2, les données contenues dans B_0 … B_{k-1} dans les premiers niveaux de $B_1 \dots B_{k-1}$ ainsi que le premier niveau de B_k si celui-ci est vide sinon dans son second niveau.

E1								γ		a_0	a_1				
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}					a_{-3}	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			

Bd 2	a_{-2}	a_{-1}													

Conservation de l'invariant

1. On déplace la tête de lecture de la bande 1 (qui se trouve en B_0) vers la droite jusqu'à trouver le premier bloc non plein B_i.
2. On recopie alors grace à la bande 2 de M_2, les données contenues dans $B_0 \ldots B_{k-1}$ dans les premiers niveaux de $B_1 \ldots B_{k-1}$ ainsi que le premier niveau de B_k si celui-ci est vide sinon dans son second niveau.

E1								γ		a_0	a_1				
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}					a_{-3}	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			

Bd 2	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3									

Conservation de l'invariant

1. On déplace la tête de lecture de la bande 1 (qui se trouve en B_0) vers la droite jusqu'à trouver le premier bloc non plein B_i.
2. On recopie alors grace à la bande 2 de M_2, les données contenues dans B_0 … B_{k-1} dans les premiers niveaux de $B_1 \dots B_{k-1}$ ainsi que le premier niveau de B_k si celui-ci est vide sinon dans son second niveau.

E1								γ							
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}					a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			
Bd 2	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3									

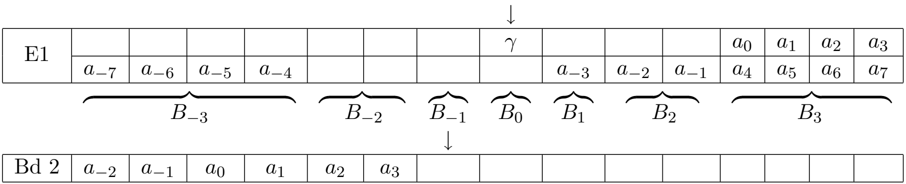
Conservation de l'invariant

1. On déplace la tête de lecture de la bande 1 (qui se trouve en B_0) vers la droite jusqu'à trouver le premier bloc non plein B_i.
2. On recopie alors grace à la bande 2 de M_2, les données contenues dans $B_0 \dots B_{k-1}$ dans les premiers niveaux de $B_1 \dots B_{k-1}$ ainsi que le premier niveau de B_k si celui-ci est vide sinon dans son second niveau.

E1								γ				a_0	a_1	a_2	a_3
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}					a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			
Bd 2	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3									

Conservation de l'invariant

1. On déplace la tête de lecture de la bande 1 (qui se trouve en B_0) vers la droite jusqu'à trouver le premier bloc non plein B_i.
2. On recopie alors grace à la bande 2 de M_2, les données contenues dans $B_0 \ldots B_{k-1}$ dans les premiers niveaux de $B_1 \ldots B_{k-1}$ ainsi que le premier niveau de B_k si celui-ci est vide sinon dans son second niveau.
3. Ce transfert de données se fait en respectant les propriétés 2 et 3 et prend un temps proportionel à la taille de B_k.
4. On repositionne la tête de lecture en B_0 (prop 4)



Conservation de l'invariant suite

E1								γ				a_0	a_1	a_2	a_3
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}					a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			

Bd 2	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3									

Conservation de l'invariant suite

1. On déplace la tête de lecture de la bande 1 (qui se trouve en B_0) vers la gauche jusqu'à trouver le premier bloc non vide B_{-i}.
2. On recopie alors grace à la bande 2 de M_2, les données contenues dans le premier niveau de B_{-k} dans les premiers niveaux de $B_{-k+1} \ldots B_1, B_0$ ainsi que les données du second niveau de B_{-k} dans son premier niveau alors vide.

								$\downarrow$							
E1								γ				a_0	a_1	a_2	a_3
	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}					a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			
							$\downarrow$								
Bd 2	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3									

Conservation de l'invariant suite

1. On déplace la tête de lecture de la bande 1 (qui se trouve en B_0) vers la gauche jusqu'à trouver le premier bloc non vide B_{-i}.
2. On recopie alors grace à la bande 2 de M_2, les données contenues dans le premier niveau de B_{-k} dans les premiers niveaux de $B_{-k+1} \dots B_1, B_0$ ainsi que les données du second niveau de B_{-k} dans son premier niveau alors vide.

								$\downarrow$							
E1								γ				a_0	a_1	a_2	a_3
					a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			
										$\downarrow$					
Bd 2	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}					

Conservation de l'invariant suite

1. On déplace la tête de lecture de la bande 1 (qui se trouve en B_0) vers la gauche jusqu'à trouver le premier bloc non vide B_{-i}.
2. On recopie alors grace à la bande 2 de M_2, les données contenues dans le premier niveau de B_{-k} dans les premiers niveaux de $B_{-k+1} \dots B_1, B_0$ ainsi que les données du second niveau de B_{-k} dans son premier niveau alors vide.
3. Ce transfert de données se fait en respectant les propriétés 2 et 3 et prend un temps proportionel à la taille de B_{-k}.

E1								γ				a_0	a_1	a_2	a_3
					a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			

Bd 2	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}					

Conservation de l'invariant suite

1. On déplace la tête de lecture de la bande 1 (qui se trouve en B_0) vers la gauche jusqu'à trouver le premier bloc non vide B_{-i}.
2. On recopie alors grace à la bande 2 de M_2, les données contenues dans le premier niveau de B_{-k} dans les premiers niveaux de $B_{-k+1} \dots B_1, B_0$ ainsi que les données du second niveau de B_{-k} dans son premier niveau alors vide.
3. Ce transfert de données se fait en respectant les propriétés 2 et 3 et prend un temps proportionel à la taille de B_{-k}.
4. On repositionne la tête de lecture en B_0 (prop 4)

								$\downarrow$							
E1								γ				a_0	a_1	a_2	a_3
					a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_4	a_5	a_6	a_7
	B_{-3}				B_{-2}		B_{-1}	B_0	B_1	B_2		B_3			
										$\downarrow$					
Bd 2	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}					

Analyse du temps amorti $O(\log T(n))$

Definition

On appelle cette opération (la conservation de l'invariant appliquée au bloc B_k) une B_k-opération

Analyse du temps amorti $O(\log T(n))$

Propriété

- *Une B_k-opération s'effectue en $m2^k$ (m constante) pas de calcul*

Analyse du temps amorti $O(\log T(n))$

Propriété

- *Une* B_k*-opération s'effectue en* $m2^k$ *(*m *constante) pas de calcul*
- *Après une* B_k*-opération,* $\forall i, 0 \leq i \leq k-1, B_i$ *est à moitié plein*

Analyse du temps amorti $O(\log T(n))$

Propriété

- *Une* B_k*-opération s'effectue en* $m2^k$ *(*m *constante) pas de calcul*
- *Après une* B_k*-opération,* $\forall i, 0 \leq i \leq k-1, B_i$ *est à moitié plein*
- *Un bloc* B_k *ne peut se remplir que lors d'une* B_k*-opération*

Analyse du temps amorti $O(\log T(n))$

Propriété

- *Une B_k-opération s'effectue en $m2^k$ (m constante) pas de calcul*
- *Après une B_k-opération, $\forall i, 0 \leq i \leq k-1, B_i$ est à moitié plein*
- *Un bloc B_k ne peut se remplir que lors d'une B_k-opération*
- *Entre deux B_k-opération on doit effectuer une B_{k-1}-opération, une B_{k-2}-opération ..., une B_1-opération dans cette ordre*

Analyse du temps amorti $O(\log T(n))$

Propriété

- *Une* B_k*-opération s'effectue en* $m2^k$ *(*m *constante) pas de calcul*
- *Après une* B_k*-opération,* $\forall i, 0 \leq i \leq k-1, B_i$ *est à moitié plein*
- *Un bloc* B_k *ne peut se remplir que lors d'une* B_k*-opération*
- *Entre deux* B_k*-opération on doit effectuer une* B_{k-1}*-opération, une* B_{k-2}*-opération* $\ldots$*, une* B_1*-opération dans cette ordre*

Posons T_k le nombre de pas de calcul entre deux B_k-opérations, on a :

$$T_1 \geq 2 \quad \text{et} \quad \forall k > 1 \quad T_k \geq \sum_{i=1}^{k-1} T_i$$

Analyse du temps amorti $O(\log T(n))$

d'où :

$$T_k \geq \sum_{i=1}^{k-2} T_i + T_{k-1} \geq 2 \sum_{i=1}^{k-2} T_i \geq 4 \sum_{i=1}^{k-3} T_i \geq \ldots \geq 2^{k-2} T_1 \geq 2^{k-1}$$

Analyse du temps amorti $O(\log T(n))$

d'où :

$$T_k \geq \sum_{i=1}^{k-2} T_i + T_{k-1} \geq 2\sum_{i=1}^{k-2} T_i \geq 4\sum_{i=1}^{k-3} T_i \geq \ldots \geq 2^{k-2}T_1 \geq 2^{k-1}$$

On en déduit que M_2 fera des B_i-opération pour les i tels que $i \leq \log_2 T(n) + 1$

Analyse du temps amorti $O(\log T(n))$

d'où :

$$T_k \geq \sum_{i=1}^{k-2} T_i + T_{k-1} \geq 2\sum_{i=1}^{k-2} T_i \geq 4\sum_{i=1}^{k-3} T_i \geq \ldots \geq 2^{k-2}T_1 \geq 2^{k-1}$$

On en déduit que M_2 fera des B_i-opération pour les i tels que $i \leq \log_2 T(n) + 1$

D'où si M_1 fait $T(n)$ pas de calcul, M_2 fait au plus :

$$T_2(n) = \sum_{i=1}^{\log_2 T(n)+1} m2^i \frac{T(n)}{2^{i-1}} \leq 4m\,T(n)\,log_2\,T(n)$$

Analyse du temps amorti $O(\log T(n))$

d'où :

$$T_k \geq \sum_{i=1}^{k-2} T_i + T_{k-1} \geq 2\sum_{i=1}^{k-2} T_i \geq 4\sum_{i=1}^{k-3} T_i \geq \ldots \geq 2^{k-2}T_1 \geq 2^{k-1}$$

On en déduit que M_2 fera des B_i-opération pour les i tels que $i \leq \log_2 T(n) + 1$
D'où si M_1 fait $T(n)$ pas de calcul, M_2 fait au plus :

$$T_2(n) = \sum_{i=1}^{\log_2 T(n)+1} m2^i \frac{T(n)}{2^{i-1}} \leq 4m\,T(n)\,log_2\,T(n)$$

Il reste finalement à effectuer ces opérations pour chacun des k étages de la bande 1 ce qui introduit un facteur k dans le resultat :

$$T_2(n) \leq 4m\,k\,T(n)\,log_2\,T(n)$$

Application au théorème de hiérarchie en temps

Definition

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est constructible en temps s'il existe une machine de Turing M majorée en temps par f telle que $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists w \in A^*$ tel que l'execution de M sur w se fasse en exactement $f(n)$ pas de calcul

Application au théorème de hiérarchie en temps

Théorème

Soit T_2 une fonction constructible en temps et T_1 tel que

$$inf_{n\to\infty}\frac{T_1(n)\log T_1(n)}{T_2(n)} = 0$$

Alors il existe un langague L dans $DTIME(T_2(n))$ qui n'est pas dans $DTIME(T_1(n))$ ie $DTIME(T_1(n)) \subsetneq DTIME(T_2(n))$

Application au théorème de hiérarchie en temps

Théorème

Soit T_2 une fonction constructible en temps et T_1 tel que

$$inf_{n\to\infty} \frac{T_1(n)\log T_1(n)}{T_2(n)} = 0$$

Alors il existe un langague L dans $DTIME(T_2(n))$ qui n'est pas dans $DTIME(T_1(n))$ ie $DTIME(T_1(n)) \subsetneq DTIME(T_2(n))$

Exemple

Comme $T(n) = 2^n$ est constructible en temps et que

$$\forall k \quad inf_{n\to\infty} \frac{kn^k \log n}{2^n} = 0$$

On a $PTIME \subsetneq EXPTIME \subsetneq EXP2TIME \subsetneq EXP3TIME \ldots$