M2 MPRI Symbolic dynamics
Exercises

V. Berthé berthe@irif.fr

2021

<u>Exercice 1</u> Sturmian words and recurrence

We recall that a Sturmian word u is an infinite word that has exactly $n+1$ factors of length n, for every n, and equivalently, that it is an aperiodic 1-balanced word. We also recall that if an infinite word v is such that its factor complexity $p_v(n)$ satisfies $p_v(n) \leq n$ for some n, then v is ultimately periodic.

Let u be a Sturmian word.

1. Prove that it u is recurrent.

   Hint: Assume that some finite factor does not occur in some $v = T^n(u)$. What can be said on the factor complexity of v? Deduce that v is ultimately periodic and conclude.

2. The aim of this exercise is to prove that $(\overline{\mathcal{O}(u)}, T)$ is minimal, or equivalently, that u is uniformly recurrent.

   Let $v \in \overline{\mathcal{O}(u)}$. By contradiction, assume that the set of factors of v is strictly included in the set of factors of u.

   (a) **First method.** Prove that v is ultimately periodic and deduce that there exists a non-empty word w such that w^n belongs to u for all n. Deduce a contradiction from the fact that u is balanced.

   Hint. Let $\mathcal{A}$ stand for the alphabet on which u is defined. Consider the number of occurrences of the letter a in factors of length $|w|$. They admit two values, C and $C+1$ say. Let us assume that $|w|_1 = C$. Prove that there exists a factor of the form $v_1 w_1 \cdots w_n v_2$ where $|v_1|_1 = |v_2|_1 = C+1$ and $|w_i| = C$. Deduce a contradiction.

   (b) **Second method.** We recall that the graph of words Γ_n of order n of an infinite word u is defined as the following oriented graph: its vertices are the factors of u of length n and there is an arrow between two factors v and w if there exists a word z of length $n-1$ such that $u = az$, $v = zb$ with a, b are letters, and azb is a factor of u. In other words, w follows v in u.

Prove that an infinite word u is recurrent (all its factors occur infinitely often) if and only if all its graph of words Γ_n, for any n, are strongly connected.

What is the general shape of a graph of words of a sturmian word? Deduce that any sturmian word is uniformly recurrent.

Exercice 2 **Fixed points of primitive substitutions**

Prove that any primitive substitution admits a right-prolongable power having a fixed point.

Hint: Let σ be a substitution. Consider the oriented graph having as vertices the letters of the alphabet and an arrow between a and b if b if the first letter of $\sigma(a)$. Prove that there exists a letter a and a non-negative integer n such that the first letter of $\sigma^n(a)$ is a.

Exercice 3 **Factor complexity function of the Fibonacci word**

Let $\mathcal{A} = \{a, b\}$ and let $\sigma \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ be the Fibonacci substitution defined by $\sigma(a) = ab$ and $\sigma(b) = a$.

A factor w of an infinite word is called right special if there exist two distinct letters a and b such that wa and wb are both factors of this infinite word. Similarly, a factor w of an infinite word is called left special if there exist two distinct letters a and b such that aw and bw are both factors of this infinite word.

1. How many fixed points does the substitution σ have in $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$? What are the fixed points of the powers of σ?

   Let us denote by u the fixed point of σ starting with a, i.e., $u = \sigma^{\omega}(a)$.

2. Give the incidence matrix of σ. Is σ primitive? Is $(\overline{\mathcal{O}(u)}, T)$ minimal? Is u uniformly recurrent?

3. Give the list of factors of u of size smaller than or equal to 6. Give the list of its right special factors of size at most 5. Give its graphs of words of length 1 to 5.

4. The aim of this question is to prove the following decomposition lemma: every factor w of u can be written in a unique way as

$$w = r_1 \sigma(v) r_2$$

   where v is a factor of u, $r_1 \in \{\varepsilon, b\}$, and $r_2 = a$ if the last letter of w is a, and $r_2 = \varepsilon$, otherwise.

5. Prove that if w is a non-empty left special factor of u, then there exists a unique non-empty left special factor v of u such that $w = \sigma(v) r_2$, where $r_2 = a$ if the last letter of w is a, and $r_2 = \varepsilon$, otherwise.

   Deduce that the Fibonacci word u is sturmian, i.e., $p_u(n) = n + 1$ for all n.

6. Prove that the set of factors of u is stable by mirror image.

   Hint: First method. Consider the substitution τ on $\mathcal{A}$ defined by $\tau(a) = ba$ and $\tau(b) = a$. Prove that $\tau(w)$ is obtained from $\sigma(w)$ by deleting its first letter a and adding it to its end, for any non-empty finite word w. Prove that the fixpoint v starting by a of τ^2 belongs to the subshift generated by u. Notice that any factor of v belongs to some $\tau^n(a)$. Conclude.

   Second method. Use 1-balancedness.

<u>Exercice 3</u> Étude d'un mot infini défini par une substitution

Soient $\mathcal{A} = \{a, b\}$ et $\sigma \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ la substitution définie par $\sigma(a) = abaa$ et $\sigma(b) = babb$.

1. Combien de points fixes la substitution σ admet-elle dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$?

   Dans la suite, on note u le point fixe de σ commençant par a.

2. Montrer que la suite u est uniformément récurrente.

3. Montrer que l'ensemble de ses facteurs est invariant par l'échange des lettres a et b.

4. Donner la liste des facteurs de u de longueur inférieure ou égale à 6. Donner la liste des facteurs spéciaux à droite de longueur 5 de u. Représenter les graphes des mots de Rauzy de u de rang 1 à 5. Quelle semble être la complexité de u?

5. L'ensemble des facteurs de u est-il invariant par image miroir?

6. Le but de cette question est de montrer le *lemme de décomposition* suivant : tout facteur W de longueur au moins 5 de u s'écrit de manière *unique*

$$W = R\sigma(V)S$$

   où V est un facteur de u,

$$R \in \{\varepsilon, a, aa, baa, b, bb, abb\}, \quad \text{et } S \in \{\varepsilon, a, ab, aba, b, ba, bab\}.$$

   (a) Existence. Montrer que si $u = u_0 u_1 \cdots u_n \cdots u$, alors on a $\sigma(u_n) = u_{4n} u_{4n+1} u_{4n+2} u_{4n+3}$. En déduire l'existence d'une telle décomposition.

   (b) Unicité. Montrer que R est déterminé par un préfixe de longueur au plus 5 de W; pour cela, par une étude de cas, montrer que pour chacune des valeurs possibles de R, cette valeur détermine un préfixe de longueur au plus 5 de W. Conclure en remarquant que la détermination de R implique celle de S.

7. Montrer que si W est un facteur spécial à droite de u de longueur supérieure ou égale à 5, alors W se dcompose de manière unique comme $W = R\sigma(V)$, où V est un facteur spécial à droite de u et $R \in \{\varepsilon, a, aa, baa, b, bb, abb\}$. On pourra utiliser le fait que le suffixe de W de longueur 5 est en particulier spécial à droite.

8. Montrer que pour tout $n \geq 2$, u a le même nombre de facteurs spéciaux à droite de longueur n. Donner ce nombre.

9. En déduire la fonction de complexité de u.

<u>Exercice 5</u> Mois infinis de fonction de complexité de la forme de la forme $p(n) = n + k$, pour tout n

1. Soit $k \geq 1$. Construire à partir de la suite de Fibonacci un exemple u de suite dont la fonction de complexité $p_u(n)$ satisfait :
$$p_u(n) = n + k, \text{ pour tout } n.$$

2. Soit u une suite définie sur l'alphabet $\mathcal{A}$ telle que chacune des lettres de $\mathcal{A}$ apparaisse dans u. Montrer que si la fonction de complexité de la suite u satisfait
$$\exists n \in \mathbb{N}, \; p_u(n) < n + \text{Card } (\mathcal{A}) - 1,$$
alors la suite est ultimement périodique.

3. Soit $k \geq 1$. Dans toute cette question, la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite *non récurrente* dont la fonction de complexité satisfait
$$p_u(n) = n + k, \text{ pour tout } n.$$
   (a) Soit $a = u_0$ la première lettre de la suite u. Le but de cette question est de montrer par l'absurde que la lettre a ne se prolonge pas à gauche dans la suite u.
   On suppose a contrario que a se prolonge à gauche dans u. Quelles sont les deux formes possibles du graphe des mots d'ordre 1 de la suite u? En déduire que les $k + 1$ lettres de $\mathcal{A}$ apparaissent infiniment souvent dans la suite u. Déduire de la non récurrence de u et de la question 2. une contradiction.
   (b) Quelle est la complexité de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$?
   (c) En déduire que si la suite u est non récurrente, alors il existe $l \geq 1$, $\mathcal{A}'$ sous-alphabet de $\mathcal{A}$, $a_1, a_2, \cdots, a_l$ lettres de $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{a_1, \cdots, a_l\}$ et une suite récurrente w sur l'alphabet $\mathcal{A}'$ tels que
$$u = a_1 a_2 \cdots a_l \mathbf{w}.$$
   Quelle est la complexité de w?

<u>Exercice 6</u> Sur les mots sturmiens Montrer que l'ensemble des facteurs d'un mot sturmien est stable par image miroir.
Indication: utiliser l'équilibre.