Optimisation Combinatoire - Travaux Dirigés n° 10

— Maîtrise d'Informatique —

Dualité

Problème dual

On considère le problème (**P**) de programmation linéaire sous forme standard

$$\text{Maximiser} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & j = 0, \dots, n \end{cases}$$

S'il existe m réels $y_i \geq 0$ tels que pour tout $j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j,$$

alors on a, pour toute solution réalisable $(x_1, \dots, x_n)$ du problème (**P**) :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

ce qui donne un majorant de la fonction objectif.

Le *problème dual* (**D**) du problème (**P**) s'écrit

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, \dots, n \\ y_i \geq 0, & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Le problème (**P**) est alors appelé *problème primal.*

Pour toute solution réalisable $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ du dual (c'est-à-dire satisfaisant les contraintes de **D**), $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$ est un majorant de la fonction objectif du problème primal.

Proposition 1 *Soient* $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *une solution réalisable du problème primal et* $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ *une solution réalisable du problème dual. On a alors*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

De plus, si les deux quantités sont égales alors $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *constitue une solution optimale du problème primal et* $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ *une solution optimale du problème dual.*

Théorème 1 (dualité) *Si le problème primal a une solution optimale* $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$*, alors le problème dual a une solution optimale* $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ *et* $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$.

De plus, si la fonction objectif du problème primal dans le dernier dictionnaire obtenu par la méthode du simplexe s'écrit

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} d_k x_k$$

(où x_{n+i} *représente la i-ème variable d'écart) alors une solution optimale du problème dual est donnée par* $y_i^* = -d_{n+i}$.

Soit le problème suivant

$$\text{Maximiser} \quad z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +7x_4 & \leq & 42 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & \leq & 17 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +3x_4 & \leq & 24 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 & & \end{array} \right.$$

L'application de l'algorithme du simplexe conduisait au dictionnaire final

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & = & 3 & +x_2 & & -3x_6 & +2x_7 \\ x_3 & = & 7 & -x_2 & -x_4 & +x_6 & -x_7 \\ x_5 & = & 1 & -x_2 & -2x_4 & +x_6 & +x_7 \\ \hline z & = & 147 & -2x_2 & -x_4 & -3x_6 & -4x_7 \end{array}$$

On avait ainsi établi que la valeur optimale de la fonction objectif était $z^* = 147$ et était obtenue pour $x_1^* = 3$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 7$, $x_4^* = 0$. On peut vérifier ce résultat en résolvant le problème dual

$$\text{Minimiser} \quad w = 42y_1 + 17y_2 + 24y_3$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2y_1 & +y_2 & +y_3 & \geq & 7 \\ 4y_1 & +y_2 & +2y_3 & \geq & 9 \\ 5y_1 & +2y_2 & +3y_3 & \geq & 18 \\ 7y_1 & +2y_2 & +3y_3 & \geq & 17 \\ y_1 \geq 0, & y_2 \geq 0, & y_3 \geq 0 & & \end{array} \right.$$

La fonction objectif du problème primal s'écrit $z = 147 - 2x_2 - x_4 - 3x_6 - 4x_7$ dans le dictionnaire final. Les valeurs $y_1^* = 0$, $y_2^* = 3$, $y_3^* = 4$ qui correspondent aux opposés des coefficients respectivement de x_5, x_6 et x_7 dans l'expression de z conduisent à la valeur optimale $w^* = 147 = z^*$. Il n'est pas difficile de vérifier que les y_i^* satisfont les contraintes du problème dual et donc constituent une solution réalisable de ce problème.

Théorème 2 (les écarts complémentaires) *Une solution réalisable $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ du problème primal est optimale si et seulement si il existe des nombres $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ tels que*
- *si $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_i$, alors $y_i^* = 0$*
- *si $x_j^* > 0$, alors $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* = c_j$*

et tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* \geq c_j & \text{pour } j = 1, \dots, n \\ y_i^* \geq 0 & \text{pour } i = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

Si l'on s'intéresse au même problème que précédemment : $x_1^* = 3$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 7$, $x_4^* = 0$ constituent une solution réalisable du problème primal. On cherche alors à vérifier que cette solution est optimale. Pour cela, on cherche s'il existe y_1^*, y_2^* et y_3^* vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1^* = 0 & \text{car la première contrainte n'est pas saturée} \\ 2y_1^* + y_2^* + y_3^* = 7 & \text{car } x_1^* > 0 \\ 5y_1^* + 2y_2^* + 3y_3^* = 18 & \text{car } x_3^* > 0 \end{array} \right.$$

On résous alors ce système ; en utilisant la nullité de y_1^*, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_2^* + y_3^* & = & 7 \\ 2y_2^* + 3y_3^* & = & 18 \end{array} \right.$$

Ce qui donne $y_2^* = 3$, $y_3^* = 4$. On vérifie que ces valeurs vérifient bien les inégalités requises et sont positives. La solution proposée est donc une solution optimale du problème primal.

▶ **Exercice 1** On propose la solution $x_1^* = 0$, $x_2^* = 4/3$, $x_3^* = 2/3$, $x_4^* = 5/3$ et $x_5^* = 0$ pour le problème

$$\text{Maximiser} \quad z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & +3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & +2x_5 & \leq & 4 \\ 4x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & \leq & 3 \\ 2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & -2x_4 & +5x_5 & \leq & 5 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & -2x_5 & \leq & 1 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0, & x_4 \geq 0, & x_5 \geq 0 & & \end{array} \right.$$

Est-ce correct ?

▶ **Exercice 2** On propose la solution $x_1^* = 2$, $x_2^* = 4$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 7$ et $x_6^* = 0$ pour le problème

$$\text{Maximiser} \quad z = 18x_1 - 7x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 8x_6$$

sous les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrcr}
2x_1 & -6x_2 & +2x_3 & +7x_4 & +3x_5 & +8x_6 & \leq & 1 \\
-3x_1 & -x_2 & +4x_3 & -3x_4 & +x_5 & +2x_6 & \leq & -2 \\
8x_1 & -3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & & +2x_6 & \leq & 4 \\
4x_1 & & +8x_3 & +7x_4 & -x_5 & +3x_6 & \leq & 1 \\
5x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +6x_4 & -2x_5 & -x_6 & \leq & 5 \\
x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0, & x_5 \geq 0, & x_6 \geq 0 & &
\end{array}\right.$$

Est-ce correct ?

Problème dual réalisable

L'utilisation du problème dual permet sans utiliser l'algorithme à deux phases de résoudre un problème de programmation linéaire où la solution nulle n'est pas réalisable, pourvu que les coefficients c_j de la fonction objectif du problème écrit sous forme standard soient tous négatifs. Un tel problème est dit *dual-réalisable.*

▶ **Exercice 3** Résoudre le problème suivant, sans utiliser l'algorithme à deux phases

$$\text{Maximiser} \quad z = -x_1 - x_2$$

sous les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rrcr}
-3x_1 & -x_2 & \leq & -4 \\
7x_1 & -x_2 & \leq & 7 \\
x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 & &
\end{array}\right.$$

▶ **Exercice 4** Résoudre le problème suivant

$$\text{Maximiser} \quad z = -x_1 - 2x_2$$

sous les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rrcr}
-3x_1 & +x_2 & \leq & -1 \\
x_1 & -x_2 & \leq & 1 \\
-2x_1 & +7x_2 & \leq & 6 \\
9x_1 & -4x_2 & \leq & 6 \\
-5x_1 & +2x_2 & \leq & -3 \\
7x_1 & -3x_2 & \leq & 6 \\
x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 & &
\end{array}\right.$$