Optimisation Combinatoire - Travaux Dirigés n° 2

— *Maîtrise d'Informatique* —

Problèmes de flots

La recherche d'un flot de valeur maximale dans un réseau a des applications directes, par exemple en terme de trafic, qu'il s'agisse d'un réseau de circulation ou d'un réseau téléinformatique. Ces problèmes sont modélisés par un graphe dons les sommets sont des points de passage (sans stockage) et les arcs des trajets entre ces points.

On modélise un réseau de transport par un graphe $\mathcal{G} = (S, A)$, muni d'une fonction de *capacité* c de $S \times S$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $c(x, y) = 0$ si l'arête (x, y) n'apparaît pas dans le graphe $\mathcal{G}$. On suppose qu'un sommet *source* s et qu'un sommet *puits* t sont distingués. On suppose aussi que tous les sommets se trouvent sur au moins un chemin entre la source et le puits.

On appelle *flot* une fonction f de $S \times S$ dans $\mathbb{R}$ telle que

1. quels que soient les sommets x et y, $f(x, y) \leq c(x, y)$.
2. quels que soient les sommets x et y, $f(x, y) = -f(y, x)$.
3. quels que soit x différent de s et t, $\sum_{y \in S} f(x, y) = 0$.

La *valeur* du flot est le nombre $|f| = \sum_{x \in S} f(s, x) = \sum_{x \in S} f(x, t)$. Le problème consiste à trouver un flot dont la valeur est maximale. Un tel flot n'est bien sûr pas unique.

Pour un flot fixé f, on appelle *capacité résiduelle*, la fonction c_f définie par $c_f(x, y) = c(x, y) - f(x, y)$. Cette capacité résiduelle définit un graphe $\mathcal{G}_f$ dont l'ensemble des sommets est S et dont les arêtes sont données par $A_f = \{(x, y) \mid c_f(x, y) > 0\}$.

Un *chemin d'augmentation* de f est un chemin simple dans le graphe $\mathcal{G}_f$. La capacité d'un tel chemin p est la quantité $c(p) = \min\{c_f(x, y) \mid (x, y) \in p\}$. Un tel chemin permet d'augmenter la valeur du flot en définissant

$$f'(x, y) = \begin{cases} f(x, y) + c(p) & \text{si } (x, y) \in p \\ f(x, y) - c(p) & \text{si } (y, x) \in p \\ f(x, y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut vérifier que $|f'| = |f| + c(p)$. On montre alors que le flot est maximal si et seulement si le graphe résiduel ne contient pas de chemin d'augmentation.

L'algorithme pour calculer un flot maximal procède de la façon suivante.

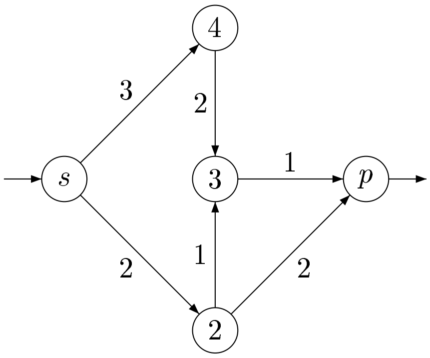
- Initialiser le flot à 0.
- Tant que c'est possible, trouver un chemin d'augmentation et augmenter le flot en conséquence.

Une coupe du réseau est une partition de S en deux ensembles disjoints de sommets (X, Y) tel que la source appartienne à X et le puits à Y. La valeur $c(X, Y)$ de la coupe est la somme

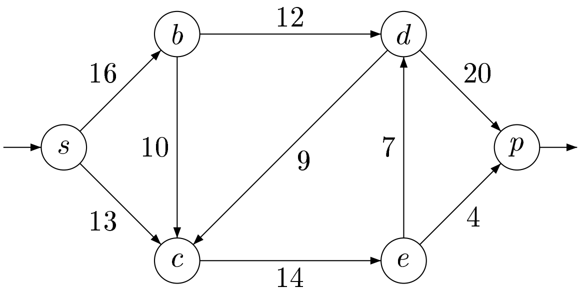
$$c(X, Y) = \sum_{x \in X \; y \in Y} c(x, y)$$

Le théorème *coupe minimale/flot maximal* dit que la valeur du flot maximal est égal à la valeur minimale d'une coupe.

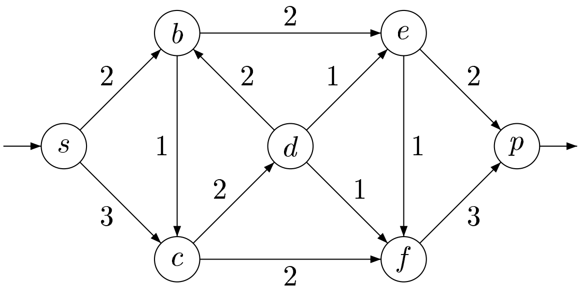
▶ **Exercice 1** Calculer le flot maximal du réseau de transport



▶ **Exercice 2** Calculer le flot maximal du réseau de transport



▶ **Exercice 3** Calculer le flot maximal du réseau de transport



▶ **Exercice 4** Calculer le flot maximal du réseau de transport dont les capacités sont données par le tableau suivant. Les capacités non marquées sont nulles.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3								
3	4	6							
4	5	7	11						
5		9	12	9					
6			14	8	19				
7			15	12	20	27			
8					23	29	40		
9					26	30	41	50	
10						31	42	55	60

▶ **Exercice 5** Montrer que le problème suivant peut être ramené à un problème classique de flots.

Soit un graphe orienté dont chaque arête a est munie d'une capacité c_a. On distingue une arête particulière a_0. Déterminer s'il existe un flot sur le réseau tel que la valeur sur a_0 soit égale à c_{a_0}. Calculer ce flot s'il existe.

Généraliser au cas où l'on distingue plusieurs arêtes.

▶ **Exercice 6** On considère un graphe orienté. A chaque arête a, on associe une capacité inférieure b_a et une capacité supérieure c_a telle que $b_a \leq c_a$. Donner un algorithme qui détermine l'existence d'un flot f satisfaisant $b_a \leq f(a) \leq c_a$ pour toute arête a et qui calcule éventuellement un tel flot.

▶ **Exercice 7** (Lemme des mariages) Soit H un ensemble d'hommes et F un ensemble de femmes. A toute femme f, on associe un ensemble d'hommes H_f avec lesquels f veut bien se marier. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les femmes se marient sans contrarier leurs désirs est que pour tout sous-ensemble F' de F, on ait

$$\mathrm{Card}(F') \leq \mathrm{Card}(\bigcup_{f \in F'} H_f)$$