Optimisation Combinatoire - Travaux Dirigés n^o 5

— *Maîtrise d'Informatique* —

Heuristiques pour le problème du voyageur de commerce

1 Variante

Le problème du voyageur de commerce consiste à trouver un circuit de poids minimal qui passe part tous les points une seule fois exactement. Une variante de ce problème autorise à passer plusieurs fois par certains points s'il en résulte une meilleure solution.

▶ **Exercice 1** Montrer que dans certains cas, il peut être avantageux de repasser plusieurs fois par certains points.

▶ **Exercice 2** Montrer par contre que si les poids vérifient l'inégalité triangulaire

$$w(u,v) \leq w(u,t) + w(t,v) \quad \text{pour tous points } u, v \text{ et } t$$

alors, toute solution optimale pour cette variante passe en fait une seule fois par chaque point. Elle est donc une solution pour le problème initial du voyageur de commerce.

▶ **Exercice 3** Montrer que si l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée, cette variante peut être résolue en résolvant un autre problème de voyageur de commerce dont les poids vérifient l'inégalité triangulaire.

2 Heuristiques

Voici quelques heuristiques permettant d'obtenir des solutions approchées au problème du voyageur de commerce.

2.1 Plus proche voisin

Il s'agit de la méthode la plus naïve pour construire un chemin hamiltonien. On part d'un sommet et à chaque étape on se déplace sur le sommet le plus proche non encore visité.

▶ **Exercice 4** On considère le problème du voyageur de commerce dont les distances entre les villes sont données par la table suivante. Ces distances correspondent à la disposition planaire de la figure 1.

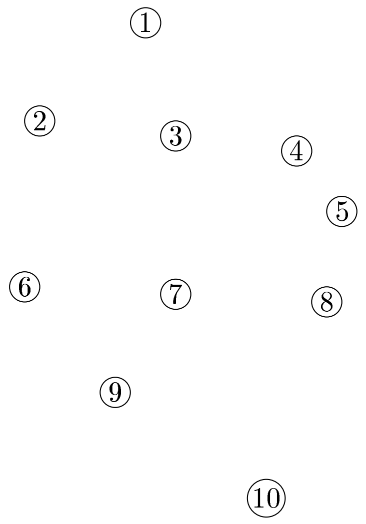

Figure 1: Positions des villes

		2	3	4	5	6	7	8	9	10
Geyser Town	1	8	5	9	12	14	12	16	17	22
Lakeside	2		9	15	17	8	11	18	14	22
Mountainview	3			7	9	11	7	12	12	17
Riverview	4				3	17	10	7	15	18
Twin Streams	5					8	10	6	15	15
Snowdania	6						9	14	8	16
Skier's Paradise	7							8	6	11
Park City	8								11	11
Rolling Downs	9									10
Tumbling Basin	10									

▶ **Exercice 5** Montrer que dans le cas général, la solution donnée par cette heuristique peut être arbitrairement grande par rapport à une solution optimale.

Dans le cas où l'inégalité triangulaire est vérifié, on peut montrer que la solution fournie par l'heuristique du proche voisin n'est jamais supérieure à $\frac{1}{2}\lceil \log_2 n \rceil + \frac{1}{2}$ fois la solution optimale.

2.2 Insertions

Les heuristiques par insertion fournissent d'autres méthodes pour construire des solutions approchées au problème du voyageur de commerce. Le principe de ces méthodes est de partir d'un circuit trivial comportant un ou deux points et d'agrandir ce circuit en y ajoutant au fur et à mesure les autres points jusqu'à obtenir un circuit qui passe par tous les points. Il existe plusieurs variantes qui se distinguent par le choix du point à insérer dans le circuit en cours.

2.2.1 Insertion du plus proche

Pour cette heuristique, on part d'un circuit trivial qui ne comporte qu'un seul point. À chaque étape, on choisit le point dont la distance à un des points du circuit est minimale. Une fois ce point choisi, on l'insère dans le circuit à l'endroit qui minimise l'augmentation de poids du circuit.

▶ **Exercice 6** Appliquer cette heuristique au données de l'exercice 4.

2.2.2 Insertion de moindre coût

Pour cette heuristique, on part d'un circuit trivial qui ne comporte qu'un seul point. À chaque étape, on choisit le point dont l'insertion minimise l'augmentation de poids du circuit.

▶ **Exercice 7** Montrer que cette heuristique est bien différente de la précédente. Appliquer cette heuristique au données de l'exercice 4.

2.2.3 Insertion du plus éloigné

Pour cette heuristique, on part d'un circuit qui ne comporte que deux points reliés par une arête de poids maximale. À chaque étape, on calcule pour chaque point v non encore dans le circuit la distance minimale de v à un point du circuit. On insère alors le point pour laquelle cette distance est maximale.

▶ **Exercice 8** Appliquer cette heuristique au données de l'exercice 4.

2.3 Heuristique géométrique

On suppose que les poids du problème correspondent à des distances entre des points du plan. On peut montrer que les sommets qui sont sur la frontière apparaissent dans tout parcours optimal dans le même ordre que sur la frontière. On considère le circuit formé de ces sommets et on essaye d'insérer les autres sommets dans ce parcours partiel.

Pour tout sommet u non sur le parcours partiel, on considère les angles formés par les deux droites reliant u à deux sommets consécutifs du parcours. À chaque étape, on insère le sommet u qui réalise le maximum de ces angles.

▶ **Exercice 9** Appliquer cette méthode aux données de l'exercice 4.

2.4 Échanges

L'idée générale de ces méthodes est de partir d'un circuit et d'essayer de le modifier afin de l'améliorer. Le circuit initial peut avoir été calculé en utilisant par exemple les heuristiques précédentes.

2.4.1 2-opt

Le principe de la méthode est d'examiner chaque paire d'arêtes non consécutives du circuit. Supposons que les deux arêtes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) soient deux arêtes non consécutives du circuit. Un nouveau circuit peut être obtenu en remplaçant ces deux arêtes par les deux arêtes (x_1, y_2) et (x_2, y_1). Si le poids du nouveau circuit est inférieur, on procède à l'échange. Sinon, on garde les deux arêtes (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

2.4.2 3-opt et k-opt

Au lieu de considérer des paires d'arêtes, on peut également considérer des 3-uplet ou des k-uplets d'arêtes deux à deux non consécutives du circuit. Si ces k arêtes sont supprimées, le circuit se coupe en k chemins disjoint. On peut alors recombiner ces chemins en utilisant d'autres arêtes entre les sommets au bouts de ces chemins.

2.5 Heuristique de Christofidès

Cette heuristique s'apparente à la méthode consistant à calculer un arbre recouvrant de poids minimal et à en extraire le circuit obtenu par un parcours préfixe de cet arbre (cf. Td N^{o}1). Par contre, elle garantit une meilleure borne. En effet, le poids d'un parcours construit par cette heuristique est au plus 1.5 fois le poids d'un parcours optimal.

Cette heuristique commence également par calculer un arbre recouvrant de poids minimal. Ensuite elle construit un couplage de poids minimum sur les sommets dont le degré dans l'arbre recouvrant est impair. Soit T l'ensemble des arêtes de l'arbre recouvrant et du couplage. On constate que T contient un circuit qui n'est pas nécessairement simple mais qui passe par tous les sommets. On extrait alors un parcours simple en reliant les sommets dans l'ordre dans lequel on les rencontre en suivant les arêtes de T et en sautant les sommets déjà visités.