Optimisation Combinatoire - Travaux Dirigés n° 6

— Maîtrise d'Informatique —

Séparation et évaluation

La méthode par séparation et évaluation (Branch and Bound en anglais) est une méthode générale pour calculer la solution exacte d'un problème d'optimisation. Elle est basée sur une recherche arborescente. L'idée principale est d'essayer de ne pas parcourir l'ensemble de toutes les solutions en utilisant des évaluations. Pour cela, on calcule des bornes qui comparées à une solution déjà trouvée permettent d'éliminer des branches de l'arborescence sans les parcourir. On va illustrer cette méthode avec le problème du voyageur de commerce.

1 Bornes inférieures

1.1 Premières bornes

On présente ici quelques méthodes permettant de trouver des bornes inférieures au problème du voyageur de commerce.

▶ **Exercice 1** Soit un PVC asymétrique donné par une fonction de coût w qui associe à toute arête (u, v) le poids $w(u, v)$ de celle-ci.

- Montrer que tout parcours du voyageur de commerce est de poids supérieur à

$$\max\Big(\sum_{u \in S} \min_{v \neq u} w(u,v), \sum_{v \in S} \min_{u \neq v} w(u,v)\Big)$$

- On suppose avoir fixé un parcours partiel, c'est-à-dire un chemin $u_1, \ldots, u_k$ ne repassant pas deux fois par le même sommet ($u_i \neq u_j$ pour $i \neq j$). Donner une borne inférieure d'un parcours du voyageur de commerce qui prolonge le chemin $u_1, \ldots, u_k$.

▶ **Exercice 2** Appliquer cette borne au problème donné par la matrice de poids

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

La borne est-elle exacte (atteinte) ?

On considère maintenant le cas où le problème est symétrique. On suppose que $w(u, v) = w(v, u)$ pour tous sommets u et v. Pour tout sommet u, on définit les poids $d_1(u)$ et $d_2(u)$ comme les poids des deux arêtes de poids minimal issues de u. Plus précisément, le sommet u étant fixé, on ordonne les autres sommets $v_1, \ldots, v_n$ de telle sorte que

$$w(u, v_1) \leq w(u, v_2) \leq \cdots \leq w(u, v_n).$$

Les poids $d_1(u)$ et $d_2(u)$ sont alors définis par $d_1(u) = w(u, v_1)$ et $d_2(u) = w(u, v_2)$.

▶ **Exercice 3** Montrer que tout parcours du voyageur de commerce est de poids supérieur à

$$\frac{1}{2}\sum_{u\in S}(d_1(u)+d_2(u)).$$

1.2 1-arbres

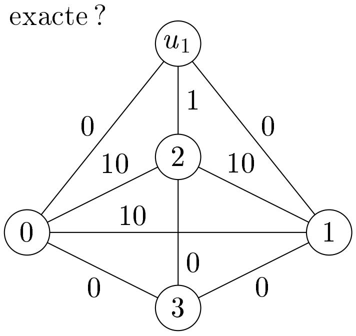
On suppose maintenant que le problème est symétrique. On fixe un sommet u_1 du graphe $\mathcal{G}=(S,E)$ sous-jacent. On appelle 1-*arbre* un arbre recouvrant du graphe $\mathcal{G}\setminus\{u_1\}$ obtenu en supprimant u_1 de $\mathcal{G}$. La terminologie 1-*arbre* provient du fait qu'on suppose toujours que le sommet supprimé est le premier sommet u_1.

▶ **Exercice 4** Montrer que tout parcours du voyageur de commerce est de poids supérieur à

$$d_1(u_1)+d_2(u_1)+B$$

où B est le poids minimal d'un 1-arbre.

▶ **Exercice 5** Appliquer cette méthode au problème du voyageur de commerce donné par le graphe ci-dessous. La borne est-elle exacte ?



Quelle borne obtient-on si les poids des trois arêtes issues du sommet 3 sont augmentés de 10 unités ? Quelle borne cela donne-t-il pour le problème initial ? Cette nouvelle borne est-elle exacte ?

1.3 Relaxation lagrangienne

Comme remarqué à l'exercice 5, il est possible d'obtenir une meilleure borne par un arbre recouvrant en modifiant au préalable les poids des arêtes. On fixe donc une fonction t qui associe à chaque sommet u un poids $t(u)$. On définit alors les poids modifiés w' par $w'(u,v)=w(u,v)+t(u)+t(v)$.

▶ **Exercice 6** Montrer que tout parcours du voyageur de commerce est de poids supérieur à

$$d'_1(u_1)+d'_2(u_1)+B'-2\sum_{u\in S}t(u)$$

où B' est le poids minimal d'un 1-arbre avec les poids w'.

L'idée de la relaxation lagrangienne est alors de modifier les poids $t(u)$ en fonction de l'arbre recouvrant calculé. On remplace $t(u)$ par $t(u) + \alpha(d_T(u) - 2)$ où $d_T(u)$ est le degré du sommet u dans l'arbre recouvrant et où α est un coefficient convenablement choisi. Avec ces nouveaux poids $t(u)$, on recalcule une nouvelle borne en calculant un nouvel arbre recouvrant de poids minimal. L'algorithme procède ainsi à plusieurs itérations jusqu'à ce que les bornes trouvées se stabilisent.

2 Séparation et évaluation

Le principe de la méthode est de considérer une arborescence dont chaque sommet correspond à un ensemble de solutions du problème. La racine est associée à l'ensemble de toutes les solutions. L'expansion de cette arborescence est régie selon quatre ingrédients : un *principe de séparation*, un *principe d'évaluation*, l'utilisation d'une *borne* et une *stratégie de développement*.

L'idée de séparation est que les solutions associées à un sommets sont réparties entre les fils de ce sommets. La borne est le coût de la meilleure solution trouvée jusqu'alors. Le traitement d'un sommet consiste à calculer une évaluation de ce sommet. Cette évaluation est une minoration des coûts des solutions du sommet. Cette évaluation est alors comparée à la borne et l'on considère trois cas.

1. L'évaluation est supérieure à la borne. Ceci signifie que toutes les solutions du sommets sont plus mauvaises que la solution qui a donné la borne. On abandonne alors le sommet.
2. L'évaluation est exacte. Ceci signifie que la minoration trouvée correspond à une solution. Il est également inutile de poursuivre puisqu'on connait la meilleure solution du sommet. La borne est actualisée et devient égale à la solution trouvée.
3. L'évaluation donne une minoration inférieure à la borne. Il est donc nécessaire de poursuivre puisque le sommet pourrait contenir une solution meilleure que celle de la borne. Suivant le principe de séparation, les solutions du sommet sont réparties entre ces fils. Le principe de développement détermine quel est le nouveau sommet à traiter. Une méthode usuelle est de procéder à un parcours en profondeur de l'arborescence. On traite alors les fils du sommets.

2.1 Première méthode

Dans cette première méthode, on utilise comme évaluation la minoration donnée par la formule de l'exercice 1. Chaque sommet de l'arborescence correspond à un parcours partiel dans le graphe. Les solutions associées à un sommet sont les parcours du voyageur qui commencent par le parcours partiel. La séparation consiste à considérer les différents prolongement du parcours partiel. Le sommet a un fils pour chaque prolongement possible. Supposons que le chemin partiel associé à un sommet S de l'arborescence soit le parcours $u_1, \ldots, u_k$. Soient $v_1, \ldots, v_m$ les sommets non encore visités par le chemin $u_1, \ldots, u_k$. Le sommet S a donc m fils $T_1, \ldots, T_m$. Le chemin associé au fils T_j est le chemin $u_1, \ldots, u_k, v_j$ obtenu en ajoutant l'arête (u_k, v_j) au chemin $u_1, \ldots, u_k$.

▶ **Exercice 7** Appliquer cette méthode aux données de l'exercice 2

2.2 Deuxième méthode

Dans cette seconde méthode, on utilise comme évaluation la minoration donnée par la formule de l'exercice 4. La séparation procède de la façon suivante. Lors de l'évaluation, on a calculé un arbre recouvrant de poids minimum du graphe $\mathcal{G} \setminus \{u_1\}$. Si l'évaluation n'est pas exacte, le graphe H obtenu en ajoutant à l'arbre recouvrant les deux arêtes de poids minimum issues de u_1 n'est pas un parcours hamiltonien. Un des sommets a donc un degré au moins égal à 3 dans H. Soit un tel sommet et soient $e_1, \ldots, e_k$ $(k \geq 3)$ les arêtes auxquelles il est adjacent dans H. Puisqu'un cycle hamiltonien est un graphe dans lequel tous les sommets ont un degré égal à 2, on ne perd aucune solution en considérant successivement celles qui ne contiennent pas e_1, celles qui ne contiennent pas e_2, jusqu'à finalement celles qui ne contiennent pas e_k. Le sommet S aura donc k fils correspondant à l'interdiction d'une des k arêtes $e_1, \ldots, e_k$. On peut traduire l'interdiction d'une arête en mettant le poids de cette arête à une valeur infinie.