Optimisation Combinatoire - Travaux Dirigés n° 9

— Maîtrise d'Informatique —

Algorithme du simplex à deux phases

Si l'on considère un problème de programmation linéaire sous forme standard

$$\text{Maximiser} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i \\ x_j \geq 0, & j = 0, \ldots, n \end{cases}$$

Le dictionnaire initial n'est pas toujours réalisable. En effet, si l'un coefficients b_i intervenant dans les contraintes linéaires $\sum a_{ij} x_j \leq b_i$ est strictement négatif, la solution basique associée au dictionnaire ne sera pas réalisable (la variable d'écart prendra une valeur négative). Un des moyens de contourner le problème est d'introduire un *problème auxiliaire*

$$\text{Minimiser} \quad x_0$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j & -x_0 & \leq & b_i \\ x_j \geq 0, & j = 0, \ldots, n \end{cases}$$

Pour obtenir une solution réalisable, il suffit alors d'augmenter suffisamment x_0 (en fait de la valeur de $max|b_i|$ où $b_i < 0$) et de mettre les autres variables à zéro. Le problème d'origine aura une solution réalisable si et seulement si le problème auxiliaire à une solution réalisable où $x_0 = 0$ ou encore le problème d'origine aura une solution réalisable si et seulement si la valeur optimale du problème auxiliaire est zéro.

Ramené à la forme standard le problème auxiliaire à étudier peut être formulé

$$\text{Maximiser} \quad -x_0$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j & -x_0 & \leq & b_i \\ x_j \geq 0, & j = 0, \ldots, n \end{cases}$$

▶ **Exercice 1** Résoudre le problème suivant

$$\text{Maximiser} \quad 3x_1 + x_2$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 & -x_2 & \leq & -3 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 4 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

▶ **Exercice 2** Résoudre le problème suivant

$$\text{Maximiser} \quad 3x_1 + x_2$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 & -x_2 & \leq & -3 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 & & \end{cases}$$

▶ **Exercice 3** Résoudre le problème suivant

$$\text{Maximiser} \quad 3x_1 + x_2$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 & -x_2 & \leq & -3 \\ 2x_1 & -x_2 & \leq & 2 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 & & \end{cases}$$