Ensembles de Meyer arithmétiques

Christiane Frougny

LIAFA et Paris 8

`http://www.liafa.jussieu.fr/~cf/`

En collaboration avec Shigeki Akiyama et Frédérique Bassino

Cristaux et quasicristaux

Cristaux: atomes rangés périodiquement.

Symétrie d'ordre n en dimension 2 ou 3.

n satisfait

$$\rho = 2\cos\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Z}$$

d'où $n = 2, 3, 4, 6$.

Quasi-cristal : alliage aluminium-manganèse avec symétrie d'ordre 5 Shechtman et al. 1984

Quasi-périodicité.

Modélisation géométrique

$\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est uniformément discret s'il existe $r > 0$ tel que toute boule de rayon r contient au plus un point de Λ.
Λ est relativement dense s'il existe $R > 0$ tel que toute boule de rayon R contient au moins un point de Λ.

Si Λ satisfait ces deux conditions, c'est un ensemble de Delaunay.

Ensemble modèle (Y. Meyer 1970, 1972)

Schéma coupe et projection

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{R}^d \times G & \xrightarrow{\pi_2} & G \\ & & \cup & & \\ & & D & & \end{array}$$

G groupe abélien loc. compact (espace interne)

$\mathbb{R}^d$ espace physique

D réseau *i.e.* sous-groupe discret de $\mathbb{R}^d \times G$ tel que $(\mathbb{R}^d \times G)/D$ est compact

$\pi_1|_D$ injective

$\pi_2(D)$ dense dans G.

On note $* = \pi_2 \circ (\pi_1|_D)^{-1}$

$$* : \pi_1(D) \longrightarrow G$$

$\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble modèle s'il existe un schéma coupe et projection et un ensemble relativement compact $\Omega \subset G$ d'intérieur non-vide tel que

$$\Lambda = \{x \in \pi_1(D) \mid x^* \in \Omega\}$$

Construction algébrique de la chaîne de Fibonacci

$\tau = (1+\sqrt{5})/2$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{R} \\ & & \cap & & \\ & & \mathbb{Z}^2 & & \end{array}$$

$\pi_1|_{\mathbb{Z}^2} \sim \mathbb{Z}[\tau] = \{a + b\tau \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

Chaîne de Fibonacci est un ensemble modèle

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{x = a + b\tau \mid x' = a - \frac{b}{\tau} \in \Omega = [0,1)\} \\ &= \{\ldots, -\tau^3, -\tau, 0, \tau^2, \tau^3 + 1, \tau^4, \ldots\} \end{aligned}$$

Pavage de $\mathbb{R}$ avec 2 tuiles L et S avec $|L| = \tau^2 = (3+\sqrt{5})/2$ et $|S| = \tau$

$$\begin{aligned} L &\mapsto LLS \\ S &\mapsto LS \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} S & | & L \\ LS & | & LLS \\ LLSLS & | & LLSLLSLS \end{array}$$

Ensemble de Meyer

$\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble de Meyer s'il est Delaunay et s'il existe un ensemble fini F tel que

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$$

Théorème 1 *Un ensemble modèle est un ensemble de Meyer.*
Réciproquement, si Λ est un ensemble de Meyer, il existe un ensemble fini F et un ensemble modèle Λ_0 tel que $\Lambda \subset \Lambda_0 + F$.

Proposition 1 *Si Λ est Meyer, alors $\Lambda + \Lambda$, $\Lambda - \Lambda$ et $\Lambda + F$, où F est fini, le sont aussi.*

PROPOSITION **2** *Λ est un ensemble de Meyer si et seulement si Λ et $\Lambda - \Lambda$ sont des ensembles de Delaunay.*

PROPOSITION **3** *Si Λ est un ensemble de Meyer et $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ est un ensemble de Delaunay, alors $\tilde{\Lambda}$ est un ensemble de Meyer.*

Remarque $\Lambda = \mathbb{Z}^+$ non Meyer car non relativement dense, mais $\Lambda - \Lambda = \mathbb{Z}$ est Delaunay.

Nombre de Pisot $\beta > 1$ entier algébrique dont tous les conjugués sont < 1 en module.
Nombre de Salem $\beta > 1$ entier algébrique dont tous les conjugués sont $\leqslant 1$ en module.

THÉORÈME **2** *Si $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble de Meyer et si $\beta > 1$ est un nombre réel tel que $\beta\Lambda \subset \Lambda$ alors β est un nombre de Pisot ou un nombre de Salem.*
Réciproquement, pour tout d et pour tout Pisot ou Salem β, il existe un ensemble de Meyer $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\beta\Lambda \subset \Lambda$.

Nombres de Pisot cyclotomiques

Si n n'est pas crystallographique $\rho = 2\cos\frac{\pi}{n}$ est un entier algébrique de degré $d \leqslant \lfloor n-1 \rfloor/2$.

Nombre de Pisot cyclotomique β tel que
$\mathbb{Z}[\rho] = \mathbb{Z}[\beta]$

Alors $d = \varphi(n)/2$ et $\mathbb{Z}[\beta] + \mathbb{Z}[\beta]\zeta$ est un anneau invariant par rotation d'ordre n, avec
$\zeta = \exp(2i\pi/n)$.

Quasi-cristaux réels

- $n = 5$ or $n = 10$: $\beta = \rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{5}$,
$M_\beta(X) = X^2 - X - 1$
- $n = 8$: $\beta = 1 + \rho = 1 + \sqrt{2} = 1 + 2\cos\frac{\pi}{4}$,
$M_\beta(X) = X^2 - 2X - 1$
- $n = 12$: $\beta = 2 + \rho = 2 + \sqrt{3} = 2 + 2\cos\frac{\pi}{6}$,
$M_\beta(X) = X^2 - 4X + 1$.

Pisot quadratiques unitaires

Beta-numération (Rényi, Parry)

$\beta > 1$, $x > 0$

Beta-développement de x:

$\beta^k \leqslant x < \beta^{k+1}$

$x_k = \lfloor x/\beta^k \rfloor$ et $r_k = \{x/\beta^k\}$.

Pour $i < k$, soit $x_i = \lfloor \beta r_{i+1} \rfloor$, et $r_i = \{\beta r_{i+1}\}$.

$$\langle x \rangle_\beta = x_k x_{k-1} \ldots x_1 x_0 \cdot x_{-1} x_{-2} \ldots$$

$x_i \in A_\beta = \{0, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}$ si β non entier.

Si le développement se termine par $000 \cdots$ il est dit fini.

Soit $T_\beta(x) = \beta x \bmod 1$ et $d_\beta(1) = (t_i)_{i \geqslant 1}$, où $t_i = \lfloor \beta T_\beta^{i-1}(1) \rfloor$.

Si β est Pisot $d_\beta(1)$ est ultimement périodique ou fini (A. Bertrand)

Systèmes dynamiques symboliques

D_β = ensemble des β-développements des éléments de $[0,1)$. Invariant par σ décalage.

S_β = fermeture de D_β dans $A_\beta^{\mathbb{N}}$. Appelé *β-shift*.

S_β est de type fini si l'ensemble de ses facteurs interdits minimaux est fini. Equivalent à l'ensemble de ses facteurs finis est reconnu par un automate fini local. Equivalent à $d_\beta(1)$ est fini.

$\beta = (1+\sqrt{5})/2$: $d_\beta(1) = 11$. $FIM = \{11\}$.

S_β est sofique si l'ensemble de ses facteurs est reconnaissable par automate fini. Equivalent à $d_\beta(1)$ est ultimement périodique.

$\beta = (3+\sqrt{5})/2$: $d_\beta(1) = 21^\omega$. $FIM = 21^*2$.

Beta-entiers

Ensemble des beta-entiers

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_\beta &= \{x \in \mathbb{R} \mid \langle |x| \rangle_\beta = x_k \cdots x_0\} \\ &= \mathbb{Z}_\beta^+ \cup (-\mathbb{Z}_\beta^+) \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_\beta$ est auto-similaire et symétrique par rapport à l'origine

$$\beta \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta \ , \ \mathbb{Z}_\beta = -\mathbb{Z}_\beta$$

$\mathbb{Z}_\tau^+ = \{0, 1, \tau, \tau^2, \tau^2 + 1, \tau^3, \ldots\}$

Théorème **3** *Si β est un nombre de Pisot, $\mathbb{Z}_\beta$ est un ensemble de Meyer.*

$\mathbb{Z}_\beta^+$ = ensemble des facteurs finis de S_β.

Les τ-entiers

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}_\tau &= \mathbb{Z}_\tau^+ \cup (-\mathbb{Z}_\tau^+) \\
&= \{0,\ 1,\ \tau,\ \tau^2,\ \tau^2+1,\ \ldots\} \\
&\cup \{-1,\ -\tau,\ -\tau^2,\ -\tau^2-1,\ \ldots\}
\end{aligned}
$$

engendrés par la substitution de Fibonacci

$$
\begin{aligned}
L &\mapsto LS \\
S &\mapsto L
\end{aligned}
$$

avec $|L| = 1$ et $|S| = 1/\tau$.

$\mathbb{Z}_\tau$ est un ensemble de Meyer qui n'est pas un ensemble modèle.

Automates pour addition et soustraction formelles

$\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta = (\mathbb{Z}_\beta^+ - \mathbb{Z}_\beta^+) \cup (\mathbb{Z}_\beta^+ + \mathbb{Z}_\beta^+) \cup -(\mathbb{Z}_\beta^+ + \mathbb{Z}_\beta^+)$

$L_\beta^+ =$ ens. des β-developpements de $\mathbb{Z}_\beta^+$.
Reconnaissable par automate fini.

Addition formelle

$L_\beta^+ + L_\beta^+ = \{(a_N + b_N) \cdots (a_0 + b_0) \mid$
$a_N \cdots a_0,\ b_N \cdots b_0 \in \mathbb{Z}_\beta^+\} \subset \{0, \cdots, 2\lfloor\beta\rfloor\}^*$.

Soustraction formelle

$L_\beta^+ - L_\beta^+ = \{(a_N - b_N) \cdots (a_0 - b_0) \mid$
$a_N \cdots a_0,\ b_N \cdots b_0 \in \mathbb{Z}_\beta^+\} \subset \{-\lfloor\beta\rfloor, \cdots, \lfloor\beta\rfloor\}^*$.

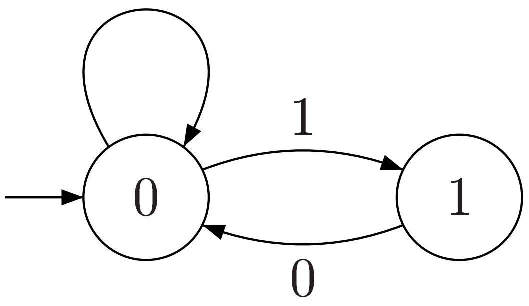
Proposition 4 *Si $d_\beta(1)$ fini ou ultimement périodique, $L_\beta^+ + L_\beta^+$ et $L_\beta^+ - L_\beta^+$ sont reconnaissables par automate fini.*

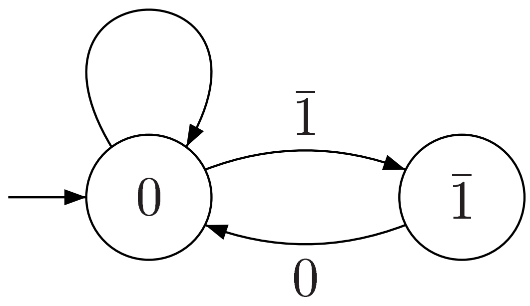
$\mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta} = \mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta^+ + \mathbb{Z}_\beta^+} \cup \mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta^+ - \mathbb{Z}_\beta^+} \cup \mathcal{A}_{-(\mathbb{Z}_\beta^+ + \mathbb{Z}_\beta^+)}$.

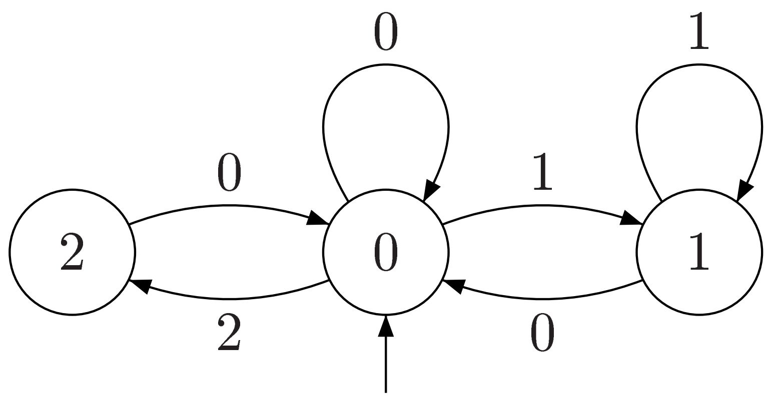
Exemple

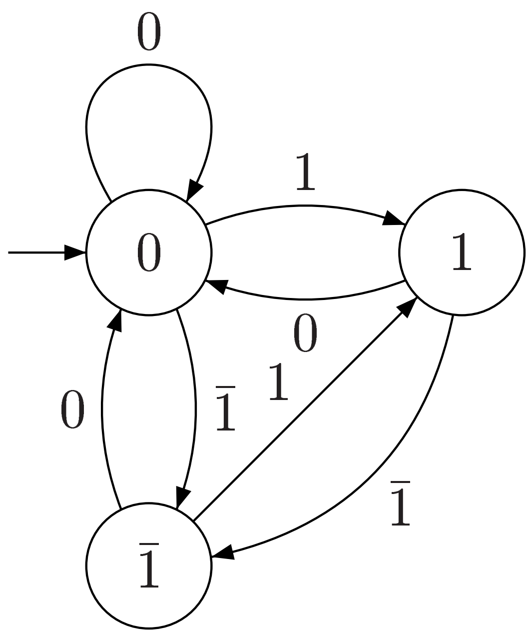
$\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $d_\beta(1) = 11$ et $d^*_\beta(1) = (10)^\omega$.

Automates pour $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta^+}$, $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta^-}$, $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta^+ + \mathbb{Z}_\beta^+}$, et $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta^+ - \mathbb{Z}_\beta^+}$.









Type fini

Si $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m$ l'ens. des mots interdits minimaux pour $\mathbb{Z}_\beta^+$ est $I_\beta = \{t_1 \cdots t_m\} \cup \{t_1 t_2 \cdots t_{p-1} x_p \mid t_p < x_p \leqslant t_1,\ 2 \leqslant p \leqslant m,\ x_p \in A_\beta\}$.

Proposition 5 *Si $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m$ fini, $\mathbb{Z}_\beta^+ - \mathbb{Z}_\beta^+$ définit un système de type fini.*

$\mathbb{Z}_\beta^+ + \mathbb{Z}_\beta^+$ *définit un système de type fini ssi $t_m = t_1$ et, pour $2 \leqslant i \leqslant m-1$, $t_i = t_1$ ou $t_i = 0$.*

Corollaire: Si $\beta < 2$ et $d_\beta(1)$ fini alors $\mathbb{Z}_\beta^+ + \mathbb{Z}_\beta^+$ définit un système de type fini.

Ensembles finis F

β Pisot donc $\mathbb{Z}_\beta$ Meyer donc il existe F fini tel que $\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + F$.

Problème Construire F aussi petit que possible.

Résultats antérieurs

Pour tout ensemble Meyer X, Lagarias a donné une construction d'un ensemble F satisfaisant

$$X - X \subset X + F.$$

Les ensembles obtenus sont très grands

On ne connait aucune méthode pour minimiser la taille de ces ensembles.

Quand β est un nombre de Pisot quadratique unitaire, des ensembles F minimaux pour $\mathbb{Z}_\beta$ sont connus [Burdik-Frougny-Gazeau-Krejcar].

Il existe plusieurs ensembles F de cardinalité minimale tels que $\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + F$.

Pour $\beta = (1+\sqrt{5})/2$ alors

- $F = \{0, \beta - 1, -\beta + 1\} = \{0, \frac{1}{\beta}, -\frac{1}{\beta}\}$,
- $F = \{0, -\beta + 2, \beta - 2\} = \{0, \frac{1}{\beta^2}, -\frac{1}{\beta^2}\} \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$
- $F = \{0, \beta - 1, -\beta + 2\} = \{0, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta^2}\} \subset [0, 1[$

sont des ensembles minimaux.

Résultats nouveaux

Lemme 1 *β un nombre de Pisot de degré d*

I un intervalle de longueur 1

$$U = \left\{ x \in \mathbb{Z}[\beta] \mid x \in I \text{ et } \forall\, 2 \leqslant j \leqslant d,\ |x^{(j)}| < \frac{3\lfloor\beta\rfloor}{1 - |\beta^{(j)}|} \right\}$$

$x^{(2)}, \ldots, x^{(d)}$ conjugués algébriques de x.

Alors U est fini, et il existe $F \subset U$ tel que

$\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + F$.

LEMME **2** *β un nombre de Pisot de degré d*
$I \subset]-1, 1[$ *un intervalle de longueur* 1

$$U = \left\{ x \in \mathbb{Z}[\beta] \mid x \in I \text{ et } \forall\, 2 \leqslant j \leqslant d,\ |x^{(j)}| < \frac{2\lfloor \beta \rfloor}{1 - |\beta^{(j)}|} \right\},$$

Alors U est fini, et il existe un sous-ensemble F de U tel que $\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + F$.

Taille de l'ensemble U

β un nombre de Pisot quadratique et

$$M_\beta(X) = X^2 - aX - b$$

son polynome minimal.

- $a \geqslant b > 0$, $d_\beta(1) = ab$
  - Si $\frac{a}{2} < b$, alors $\mathrm{Card}(U) \leqslant 4a + 1$
  - Si $b \leqslant \frac{a}{2}$, alors $\mathrm{Card}(U) \leqslant 7$
- $a \geqslant 3$ et $0 > b \geqslant -a + 2$, $d_\beta(1) = (a-1)(a+b-1)^\omega$
  - Si $-\frac{a}{2} < b$, alors $\mathrm{Card}(U) \leqslant 13$
  - Si $b \leqslant -\frac{a}{2}$, alors $\mathrm{Card}(U) \leqslant 4a - 3$

β un nombre de Pisot quadratique unitaire ($b = 1$ ou $b = -1$), alors

$$\mathrm{Card}(U) \leqslant 5.$$

Une première réduction de la cardinalité

Si $f \in F \subset (\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta) - \mathbb{Z}_\beta$ alors il existe deux mots $b_N \cdots b_0 \in \mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta$ et $a_N \cdots a_0 \in \mathbb{Z}_\beta$ tels que $f = \sum_{i=0}^{N} (b_i - a_i)\beta^i$.

On construit une suite

$$f_0 = f, \quad \forall\, 0 \leqslant i \leqslant N \quad f_{i+1} = \frac{f_i - (b_i - a_i)}{\beta} \quad \text{et} \quad f_{N+1} = 0.$$

Alors

$$f_i = \sum_{k=i}^{N} (b_k - a_k)\beta^{k-i}.$$

Soit

$$V = \left\{ x \in \mathbb{Z}[\beta] \mid |x| < \frac{2\lfloor\beta\rfloor}{\beta - 1}, \text{ et } \forall\, 2 \leqslant j \leqslant d,\ |x^{(j)}| < \frac{2\lfloor\beta\rfloor}{1 - |\beta^{(j)}|} \right\}$$

$U \subset V$ et $0 \in V$. V est fini.

Si $f \in ((\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta) - \mathbb{Z}_\beta) \cap U$, alors $f_0, \ldots, f_N$ sont dans V. En effet quand $F \subset U$, $|b_i - a_i| \leqslant 2\lfloor\beta\rfloor$.

Donc pour $2 \leqslant j \leqslant d$, les conjugués $f_i^{(j)}$ de f_i satisfont $|f_i^{(j)}| \leqslant 2\lfloor\beta\rfloor/(1 - |\beta^{(j)}|)$.

Le plus petit K tel que $|x| < K$ implique $|(x - (b - a))/\beta| < K$ est $K = 2\lfloor\beta\rfloor/(\beta - 1)$.

Puisque f est dans U, $|f| < 1$, et donc $|f_i| < K$.

On définit un graphe orienté G

- ensemble des sommets V
- transition $x \xrightarrow{(b,a)} y$ ssi $y = \beta x + (b-a)$

$V_0 =$ le sous-ensemble de V formé des sommets accessibles à partir de 0 dans G.

Lemme 3 *Soit $F \subset U$ un ensemble minimal satisfaisant $\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + F$, alors $F \subset V_0$.*

Preuve. Si $f \in F \subset (\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta) - \mathbb{Z}_\beta \cap U$ alors il existe deux mots $b_N \cdots b_0 \in \mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta$ et $a_N \cdots a_0 \in \mathbb{Z}_\beta$ tels que dans G on a

$$0 = f_{N+1} \xrightarrow{(b_N,a_N)} f_N \xrightarrow{(b_{N-1},a_{N-1})} \cdots \xrightarrow{(b_0,a_0)} f_0 = f \in V_0$$

Construction de $U \cap V_0$

Soit $f \in U$.

- On définit un automate $\mathcal{G}_f$
  - ayant comme graphe de transitions G
  - 0 comme état initial
  - f comme état final.
- On calcule l'automate de l'intersection $\mathcal{I}_f = (\mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta} \times \mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta}) \cap \mathcal{G}_f$.

Proposition **6** *Soit f dans U. Alors f est dans V_0 si et seulement si le langage reconnu par $\mathcal{I}_f$ est non-vide.*

Le nombre d'états de l'automate $\mathcal{I}_f$ est $\mathcal{O}\left(|\mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta^+}|^3 \times |V|\right)$

Minimisation de la cardinalité

THÉORÈME 4 *Un ensemble minimal $F \subset U \cap V_0$ peut être construit par un algorithme exponentiel en temps et en espace. L'algorithme construit un transducteur qui réécrit une représentation d'un élément de $\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta$ en sa décomposition sous la forme $\mathbb{Z}_\beta + F$.*

2 étapes.

1. Pour chaque $f \in U \cap V_0$, on définit un automate déterministe $\mathcal{R}_f$ qui reconnait l'ensemble des mots de $\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta$ qui apparaissent comme première composante des étiquettes des chemins réussis dans $\mathcal{I}_f$.

2. On cherche parmi tous les sous-ensembles de $U \cap V_0$ le plus petit ensemble F tel que le langage reconnu par $\mathcal{R}_F = \cup_{f \in F} \mathcal{R}_f$ contienne une représentation de chaque élément de $\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta$. Ceci est vrai ssi $\mathcal{C}_F \cap \mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta} = \emptyset$ où $\mathcal{C}_F$ = complémentaire de $\mathcal{R}_F$.

Le transducteur associé

- Entrée : $y = \sum_{i=0}^{N} b_i \beta^i \in \mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta$ où $b_N \dots b_0 \in \mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta$
- Sortie : $(a_N \dots a_0, f)$ où $a_N \dots a_0 \in \mathbb{Z}_\beta$, $f \in F$ et $y = \sum_{i=0}^{N} a_i \beta^i + f$.

On considère l'automate d'intersection $\mathcal{I}_F = (\mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta} \times \mathcal{A}_{\mathbb{Z}_\beta}) \cap \mathcal{G}_F$

F est l'ensemble des états finals de $\mathcal{G}_F$.

- La première coordonnée des étiquettes des transitions dans $\mathcal{I}_F$ s'interprète comme l'entrée dans $\mathbb{Z}_\beta - \mathbb{Z}_\beta$ du transducteur,
- La deuxième coordonnée comme la sortie correspondant dans $\mathbb{Z}_\beta$.
- L'élément associé de F est donné par la deuxième cordonnée de l'étiquette de l'état (celle qui correspond à $\mathcal{G}_F$) où le chemin se termine.