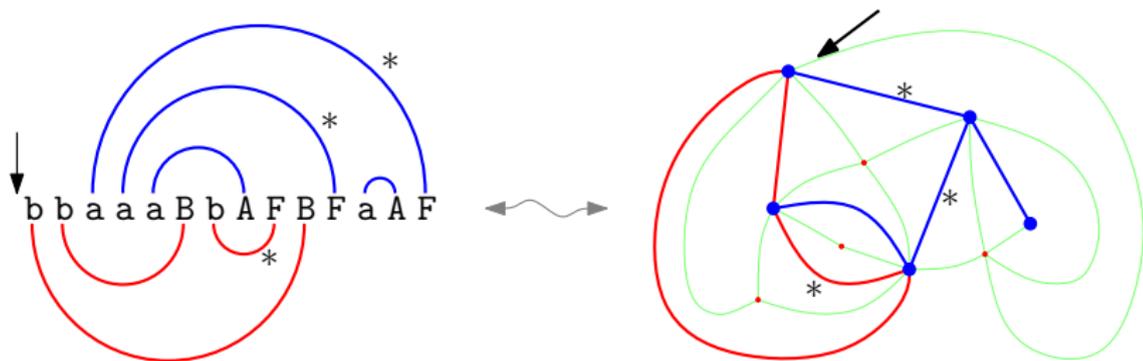


Limite locale des cartes cFK via la bijection de hamburger-cheeseburger

Linxiao Chen
sous la direction de Jérémie Bouttier et Nicolas Curien



Limite locale des cartes cFK via la bijection de hamburger-cheeseburger

Linxiao Chen

sous la direction de Jérémie Bouttier et Nicolas Curien



Plan

- 1 Introduction
 - La carte aléatoire cFK
 - Résultats principaux

Plan

- 1 Introduction
 - La carte aléatoire cFK
 - Résultats principaux
- 2 La bijection de hamburger-cheeseburger
 - Un modèle de mots
 - Construction de la bijection

Plan

- 1 Introduction
 - La carte aléatoire cFK
 - Résultats principaux
- 2 La bijection de hamburger-cheeseburger
 - Un modèle de mots
 - Construction de la bijection
- 3 Convergence vers la limite locale
 - La limite locale des mots et des cartes
 - Propriétés de la limite

La carte aléatoire cFK

La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

Conventions :

carte = carte planaire localement finie

une racine = une arête orientée distinguée = un coin distingué

sous-graphe = un sous-ensemble d'arêtes

La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

Conventions :

carte = carte planeaire localement finie

une racine = une arête orientée distinguée = un coin distingué

sous-graphe = un sous-ensemble d'arêtes

$$\mathcal{M}_n = \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \left| \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right. \right\}$$

La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

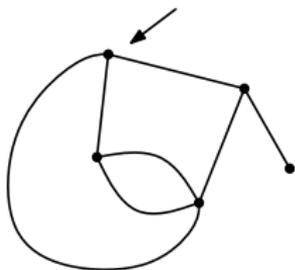
Conventions :

carte = carte planeaire localement finie

une racine = une arête orientée distinguée = un coin distingué

sous-graphe = un sous-ensemble d'arêtes

$$\mathcal{M}_n = \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \mid \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right\}$$



La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

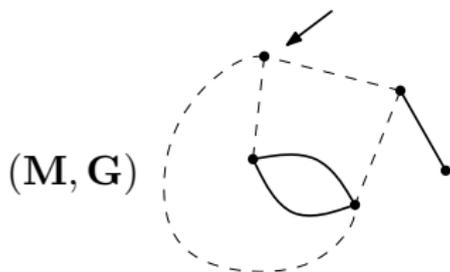
Conventions :

carte = carte planeaire localement finie

une racine = une arête orientée distinguée = un coin distingué

sous-graphe = un sous-ensemble d'arêtes

$$\mathcal{M}_n = \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \mid \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right\}$$



La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

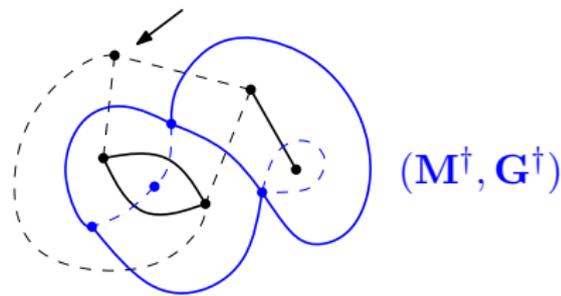
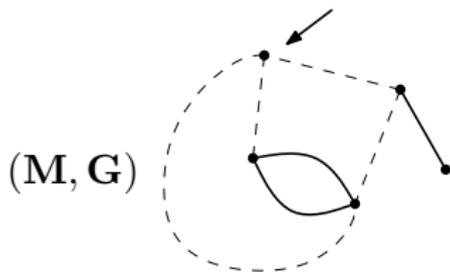
Conventions :

carte = carte planeaire localement finie

une racine = une arête orientée distinguée = un coin distingué

sous-graphe = un sous-ensemble d'arêtes

$$\mathcal{M}_n = \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \mid \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right\}$$



La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

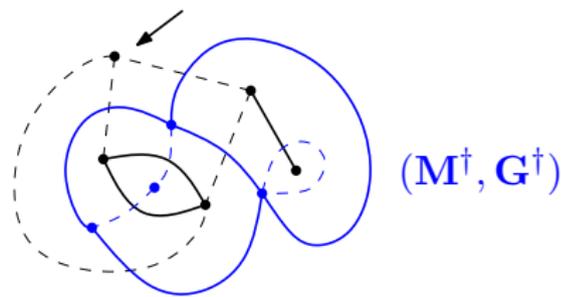
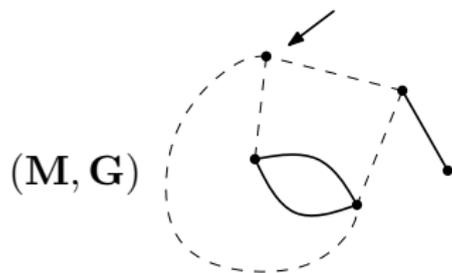
Conventions :

carte = carte plane localement finie

une racine = une arête orientée distinguée = un coin distingué

sous-graphe = un sous-ensemble d'arêtes

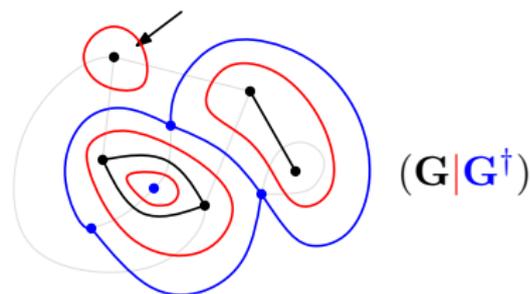
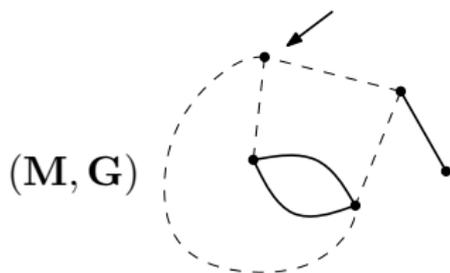
$$\mathcal{M}_n = \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \mid \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right\}$$



⚠ sous-graphe dual de $\mathbf{G} \neq$ carte duale de \mathbf{G}

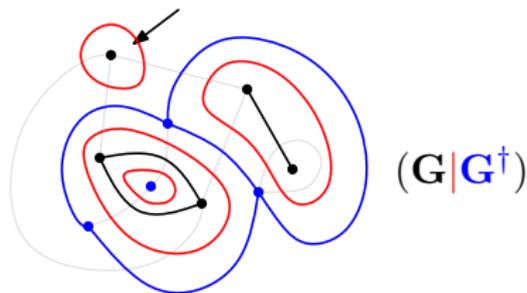
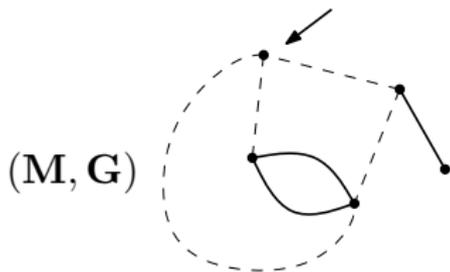
La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

$$\mathcal{M}_n = \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \mid \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right\}$$



La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

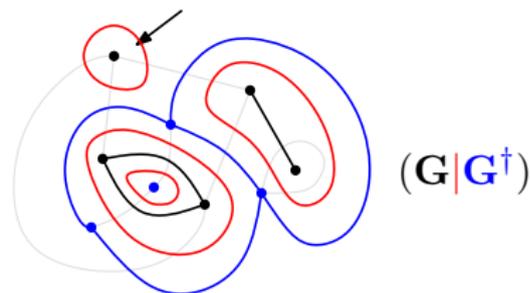
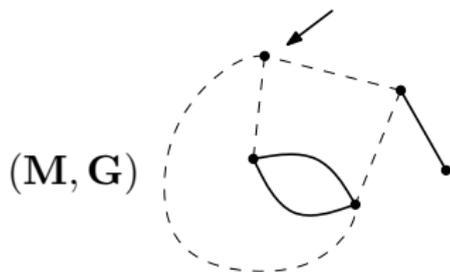
$$\mathcal{M}_n = \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \mid \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right\}$$



$$L := \#(\text{boucles séparant } \mathbf{G} \text{ et } \mathbf{G}^\dagger)$$

La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

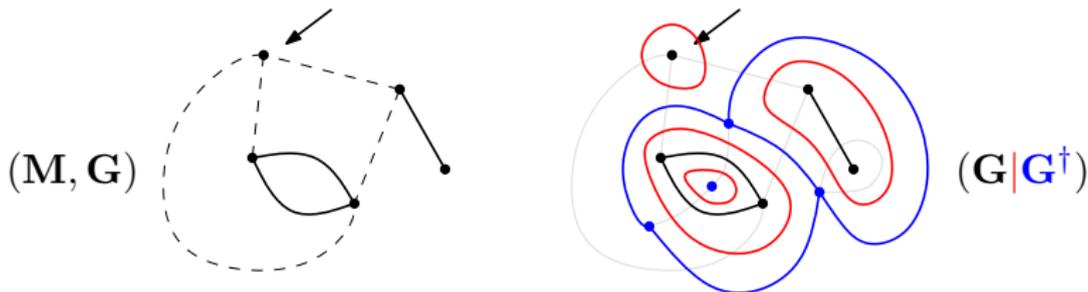
$$\mathcal{M}_n = \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \mid \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right\}$$



$$L := \#(\text{boucles séparant } \mathbf{G} \text{ et } \mathbf{G}^\dagger) = e(\mathbf{G}) + 2c(\mathbf{G}) - v(\mathbf{G})$$

La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

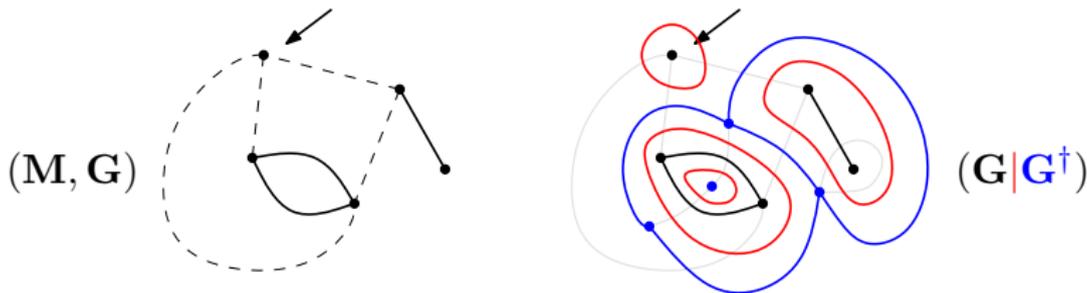
$$\mathcal{M}_n = \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \mid \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right\}$$



$$L := \#(\text{boucles séparant } \mathbf{G} \text{ et } \mathbf{G}^\dagger) = e(\mathbf{G}) + 2c(\mathbf{G}) - v(\mathbf{M})$$

La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

$$\mathcal{M}_n = \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \mid \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right\}$$



$$L := \#(\text{boucles séparant } \mathbf{G} \text{ et } \mathbf{G}^\dagger) = e(\mathbf{G}) + 2c(\mathbf{G}) - v(\mathbf{M})$$

Pour $q > 0$, soit $\mathbb{Q}_n^{(q)}$ la loi de probabilité sur \mathcal{M}_n définie par

$$\mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L} = q^{\frac{1}{2}e(\mathbf{G}) + c(\mathbf{G}) - \frac{1}{2}v(\mathbf{M})}$$

La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

$$\mathcal{M}_n := \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \left| \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes;} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L} = q^{\frac{1}{2}e(\mathbf{G}) + c(\mathbf{G}) - \frac{1}{2}v(\mathbf{M})}$$

Définition

Une carte cFK de taille n et de paramètre q est une variable aléatoire sur \mathcal{M}_n de loi $\mathbb{Q}_n^{(q)}$.

La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

$$\mathcal{M}_n := \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \left| \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes;} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L} = q^{\frac{1}{2}e(\mathbf{G})+c(\mathbf{G})-\frac{1}{2}v(\mathbf{M})}$$

Définition

Une carte cFK de taille n et de paramètre q est une variable aléatoire sur \mathcal{M}_n de loi $\mathbb{Q}_n^{(q)}$.

Remarques :

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}) \propto q^{-\frac{1}{2}v(\mathbf{M})} \sum_{\mathbf{G} \subset \mathbf{M}} q^{\frac{1}{2}e(\mathbf{G})+c(\mathbf{G})}$$

La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

$$\mathcal{M}_n := \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \left| \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes;} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L} = q^{\frac{1}{2}e(\mathbf{G}) + c(\mathbf{G}) - \frac{1}{2}v(\mathbf{M})}$$

Définition

Une carte cFK de taille n et de paramètre q est une variable aléatoire sur \mathcal{M}_n de loi $\mathbb{Q}_n^{(q)}$.

Remarques :

$$\mathbb{1} \quad \mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}) \propto q^{-\frac{1}{2}v(\mathbf{M})} \underbrace{\sum_{\mathbf{G} \subset \mathbf{M}} q^{\frac{1}{2}e(\mathbf{G}) + c(\mathbf{G})}}_{= Z_{c, \text{FK}}(\mathbf{M}) = Z_{c, \text{Potts}}(\mathbf{M})}$$

La carte aléatoire cFK (= critical Fortuin-Kasteleyn)

$$\mathcal{M}_n := \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \left| \begin{array}{l} \mathbf{M} \text{ est une carte enracinée à } n \text{ arêtes;} \\ \mathbf{G} \text{ est un sous-graphe de } \mathbf{M}. \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L} = q^{\frac{1}{2}e(\mathbf{G}) + c(\mathbf{G}) - \frac{1}{2}v(\mathbf{M})}$$

Définition

Une carte cFK de taille n et de paramètre q est une variable aléatoire sur \mathcal{M}_n de loi $\mathbb{Q}_n^{(q)}$.

Remarques :

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}) \propto q^{-\frac{1}{2}v(\mathbf{M})} \underbrace{\sum_{\mathbf{G} \subset \mathbf{M}} q^{\frac{1}{2}e(\mathbf{G}) + c(\mathbf{G})}}_{= Z_{c, \text{FK}}(\mathbf{M}) = Z_{c, \text{Potts}}(\mathbf{M})}$$

$$\textcircled{2} \quad (\text{auto-dualité}) \quad \mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) = \mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}^\dagger, \mathbf{G}^\dagger)$$

La carte aléatoire cFK

Cas particuliers :

$$\mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

La carte aléatoire cFK

$$\mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0 : L = L_{\min}$

La carte aléatoire cFK

$$\mathbb{Q}_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0 : L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .

La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0 : L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M}) ;$
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .

La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$

La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .

La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

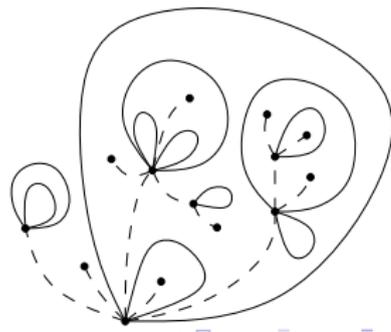
- $q \rightarrow 0 : L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M}) ;$
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1 : Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty : L = L_{\max}$

La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :

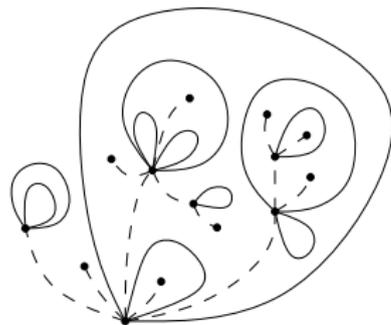


La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\sim^{\text{bij.}}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.

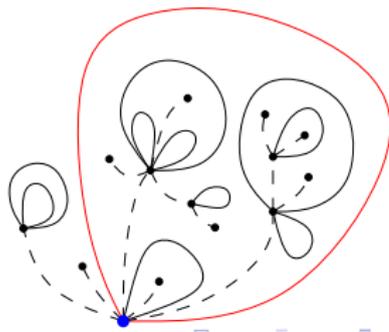


La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\sim_{\text{bij.}}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.

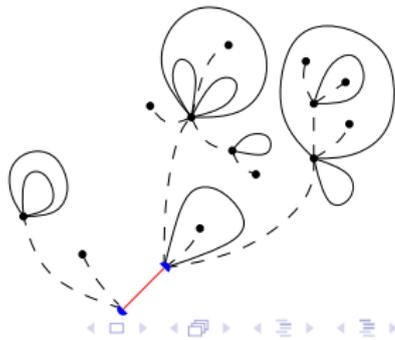


La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\stackrel{\text{bij.}}{\sim}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.

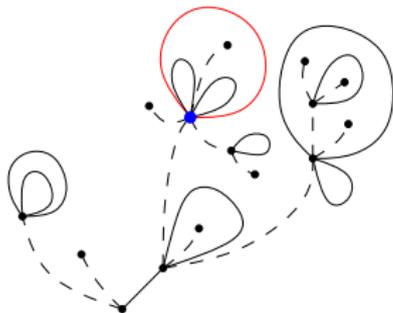


La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\stackrel{\text{bij.}}{\sim}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.

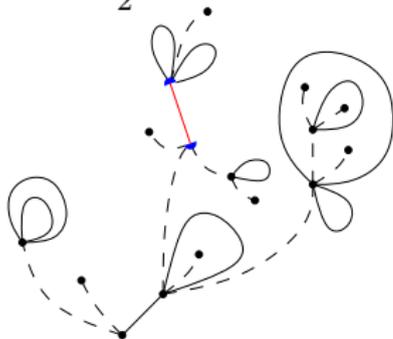


La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\stackrel{\text{bij.}}{\sim}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.



La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\underset{\text{bij.}}{\sim}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.

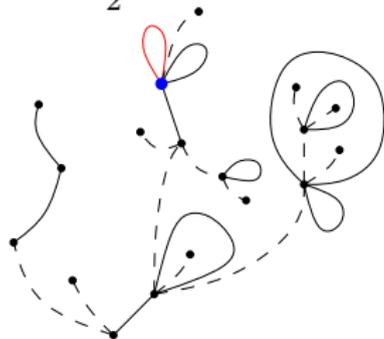


La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\stackrel{\text{bij.}}{\sim}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.

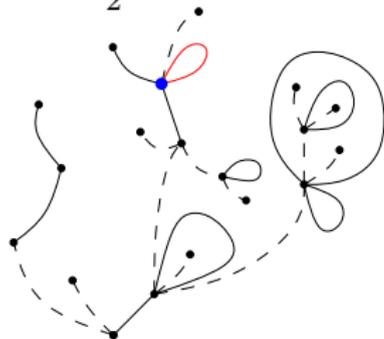


La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\stackrel{\text{bij.}}{\sim}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.

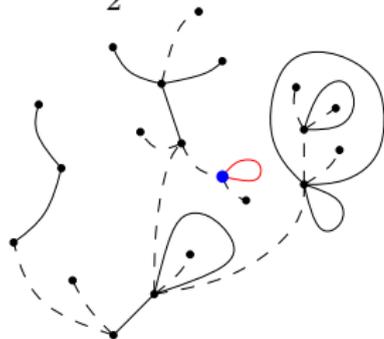


La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\stackrel{\text{bij.}}{\sim}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.

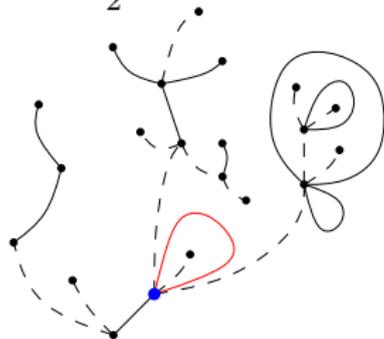


La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\stackrel{\text{bij.}}{\sim}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.

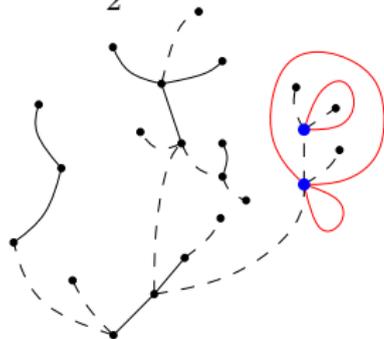


La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\stackrel{\text{bij.}}{\sim}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.



La carte aléatoire cFK

$$Q_n^{(q)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto q^{\frac{1}{2}L}$$

Cas particuliers :

- $q \rightarrow 0$: $L = L_{\min} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ est un arbre couvrant de \mathbf{M} .
 $Q_n^{(0)}(\mathbf{M}) \propto \#(\text{arbres couvrants de } \mathbf{M})$;
 \mathbf{G} est un arbre couvrant uniforme de \mathbf{M} .
- $q = 1$: $Q_n^{(1)}(\mathbf{M}, \mathbf{G}) \propto 1$
 $\mathbf{M} \sim$ carte aléatoire uniforme (à n arêtes).
 $\mathbf{G} \sim$ la percolation de paramètre $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{M} .
- $q \rightarrow \infty$: $L = L_{\max} = n + 1$
 $\Rightarrow (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est de la forme :
 $\stackrel{\text{bij.}}{\sim}$ percolation par arêtes sur
 un arbre plan à n arêtes.



Question : géométrie d'une grande carte cFK ?

Question : géométrie d'une grande carte cFK ?

- limite d'échelle

Question : géométrie d'une grande carte cFK ?

- limite d'échelle
- limite locale

Question : géométrie d'une grande carte cFK ?

- limite d'échelle \rightsquigarrow Duplantier, Miller, Sheffield '14 (limite non Gromov-Hausdorff)
- limite locale

Question : géométrie d'une grande carte cFK ?

- limite d'échelle \rightsquigarrow Duplantier, Miller, Sheffield '14 (limite non
- **limite locale** \rightarrow aujourd'hui (Gromov-Hausdorff)

Question : géométrie d'une grande carte cFK ?

- limite d'échelle \rightsquigarrow Duplantier, Miller, Sheffield '14 (limite non
- **limite locale** \rightarrow aujourd'hui Gromov-Hausdorff

$$d_{\text{loc}} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{M}' \\ \mathbf{G}' \end{pmatrix} \right) = \inf \left\{ \frac{1}{2R} \mid \begin{array}{l} (\mathbf{M}', \mathbf{G}') \text{ restreint à } B_R(\mathbf{M}') \\ = (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \text{ restreint à } B_R(\mathbf{M}) \end{array} \right\}$$

Question : géométrie d'une grande carte cFK ?

- limite d'échelle \rightsquigarrow Duplantier, Miller, Sheffield '14 (limite non
- **limite locale** \rightarrow aujourd'hui Gromov-Hausdorff

$$d_{\text{loc}} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{M}' \\ \mathbf{G}' \end{pmatrix} \right) = \inf \left\{ \frac{1}{2R} \mid \begin{array}{l} (\mathbf{M}', \mathbf{G}') \text{ restreint à } B_R(\mathbf{M}') \\ = (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \text{ restreint à } B_R(\mathbf{M}) \end{array} \right\}$$

Théorème (Existence de la limite locale, C. '14)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_n^{(q)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ faiblement pour d_{loc} .

Question : géométrie d'une grande carte cFK ?

- limite d'échelle \rightsquigarrow Duplantier, Miller, Sheffield '14 (limite non
- **limite locale** \rightarrow aujourd'hui Gromov-Hausdorff

$$d_{\text{loc}} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{M}' \\ \mathbf{G}' \end{pmatrix} \right) = \inf \left\{ \frac{1}{2R} \mid \begin{array}{l} (\mathbf{M}', \mathbf{G}') \text{ restreint à } B_R(\mathbf{M}') \\ = (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \text{ restreint à } B_R(\mathbf{M}) \end{array} \right\}$$

Théorème (Existence de la limite locale, C. '14)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_n^{(q)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ faiblement pour d_{loc} .

Théorème (Propriétés de la limite, C. '14)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ -presque sûrement, la carte \mathbf{M} a un seul bout (one-ended), et la marche aléatoire simple sur \mathbf{M} est récurrente.

Question : géométrie d'une grande carte cFK ?

- limite d'échelle \rightsquigarrow Duplantier, Miller, Sheffield '14 (limite non
- **limite locale** \rightarrow aujourd'hui Gromov-Hausdorff

$$d_{\text{loc}} \left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{M}' \\ \mathbf{G}' \end{pmatrix} \right) \right) = \inf \left\{ \frac{1}{2R} \mid \begin{array}{l} (\mathbf{M}', \mathbf{G}') \text{ restreint à } B_R(\mathbf{M}') \\ = (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \text{ restreint à } B_R(\mathbf{M}) \end{array} \right\}$$

Théorème (Existence de la limite locale, C. '14)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_n^{(q)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ faiblement pour d_{loc} .

Théorème (Propriétés de la limite, C. '14)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ -presque sûrement, la carte \mathbf{M} a un seul bout (one-ended), et la marche aléatoire simple sur \mathbf{M} est récurrente.

hamburger-cheesburger inside !

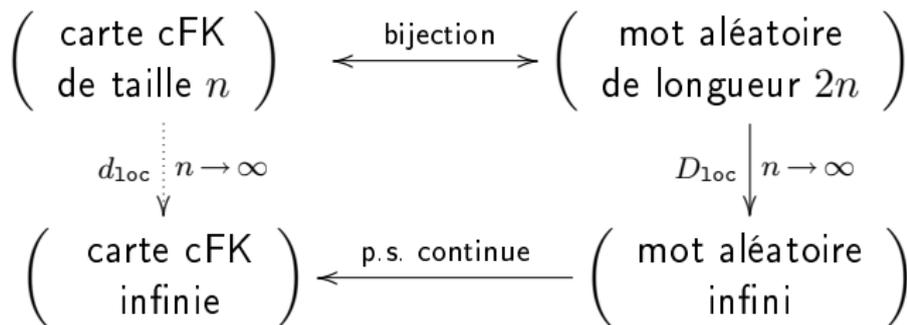
Limite locale des cartes cFK

Théorème (Existence de la limite locale)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_n^{(q)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ faiblement pour d_{loc} .

Théorème (Propriétés de la limite)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ -presque sûrement, la carte \mathbf{M} a un seul bout (one-ended), et la marche aléatoire simple sur \mathbf{M} est récurrente.



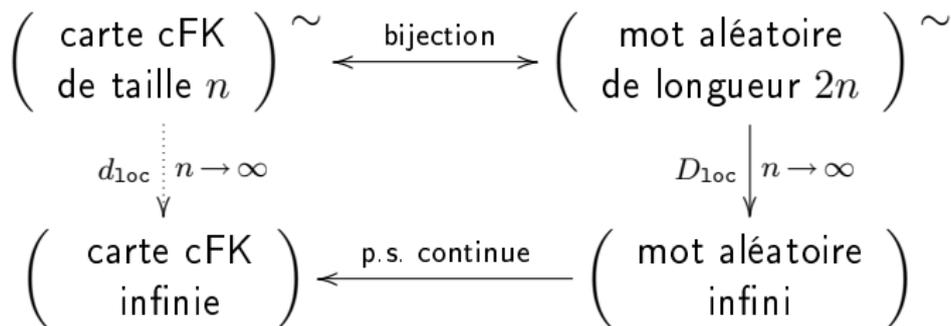
Limite locale des cartes cFK

Théorème (Existence de la limite locale)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_n^{(q)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ faiblement pour d_{loc} .

Théorème (Propriétés de la limite)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ -presque sûrement, la carte \mathbf{M} a un seul bout (one-ended), et la marche aléatoire simple sur \mathbf{M} est récurrente.



Mots aléatoires

Mots aléatoires

Alphabet

$$\Theta = \{a, b, A, B, F\}$$

Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

Mots aléatoires

Alphabet

$$\Theta = \{a, b, A, B, F\} \quad p \in [0, 1]$$

Distribution

$$\theta(p) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2}\right) \quad \leftarrow$$

symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$ ←

symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients

Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$ ←

symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients

plats a b

Clients A F B

Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$ Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$ ←

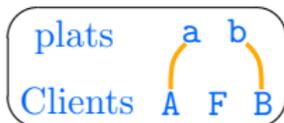
symétrie

a ↔ b

A ↔ B

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Mots aléatoires

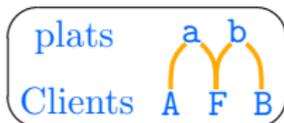
Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$ Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$ ←

symétrie

 $a \leftrightarrow b$ $A \leftrightarrow B$

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Mots aléatoires

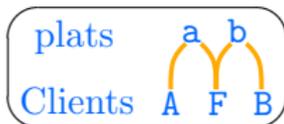
Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$ Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$ ←

symétrie

 $a \leftrightarrow b$ $A \leftrightarrow B$

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$ Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$ ←

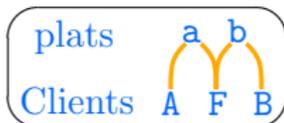
symétrie

a ↔ b

A ↔ B

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

"Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente."

Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

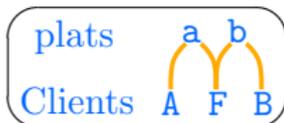
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”

b a a a B b A F B F a

Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

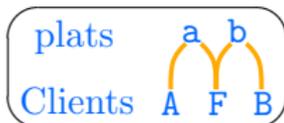
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”

b a a a B b A F B F a

Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

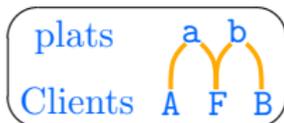
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”

b a a a B b A F B F a

Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

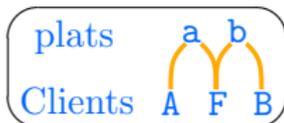
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet

$$\Theta = \{a, b, A, B, F\} \quad p \in [0, 1]$$

Distribution

$$\theta(p) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2}\right)$$

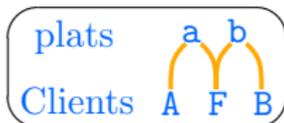
symétrie

$$a \leftrightarrow b$$

$$A \leftrightarrow B$$

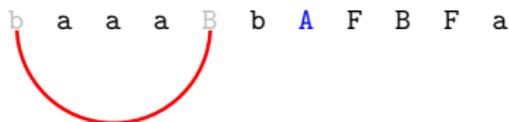
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

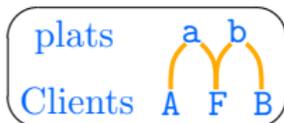
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

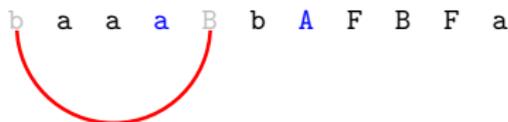
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

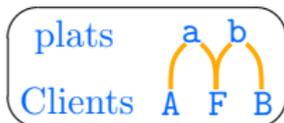
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

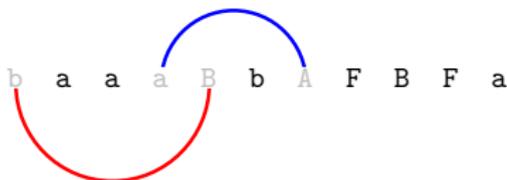
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet

$$\Theta = \{a, b, A, B, F\} \quad p \in [0, 1]$$

Distribution

$$\theta(p) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2}\right)$$

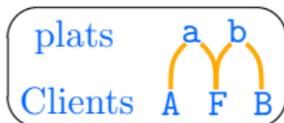
symétrie

$$a \leftrightarrow b$$

$$A \leftrightarrow B$$

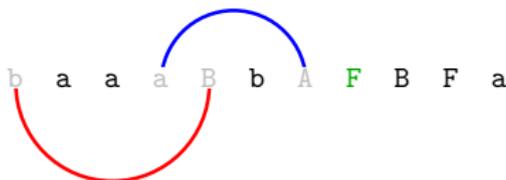
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

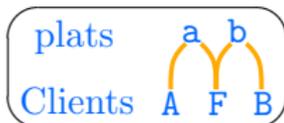
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

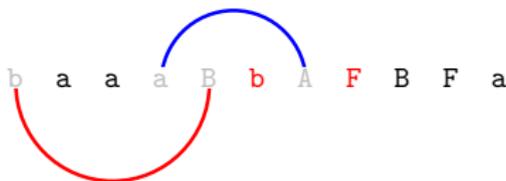
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

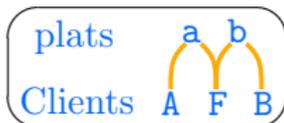
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

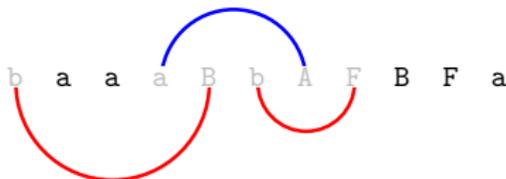
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

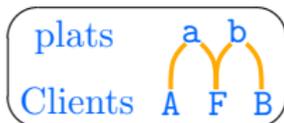
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

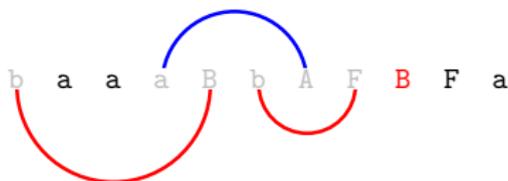
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

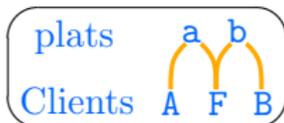
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

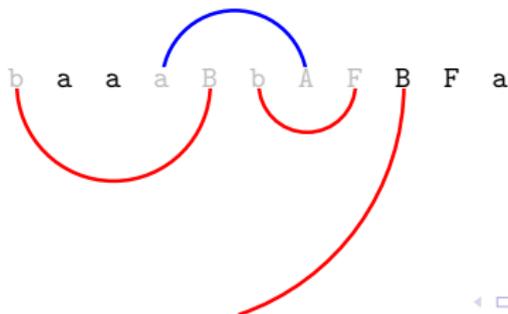
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

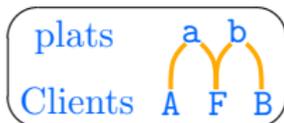
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

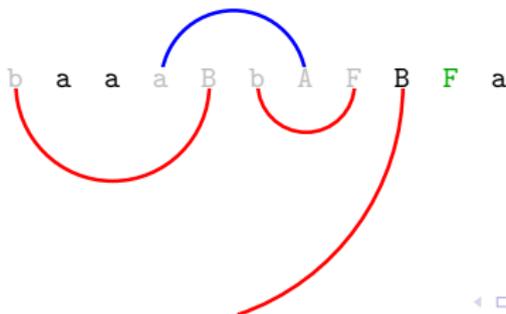
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

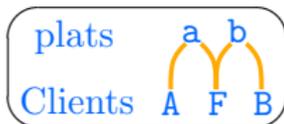
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

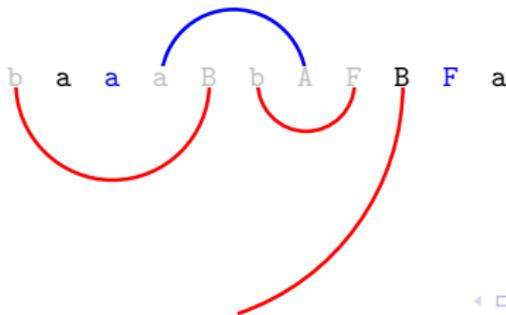
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

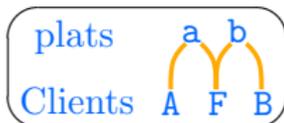
Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

symétrie
 $a \leftrightarrow b$
 $A \leftrightarrow B$

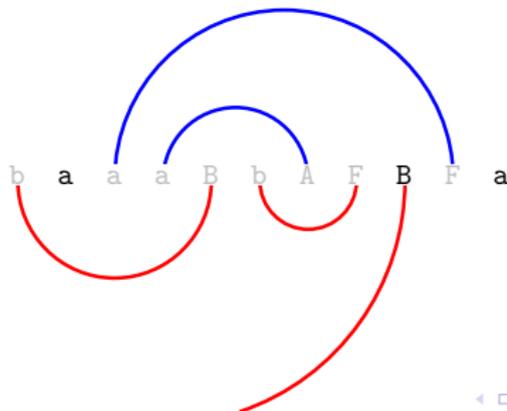
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

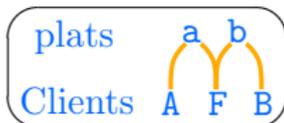
symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

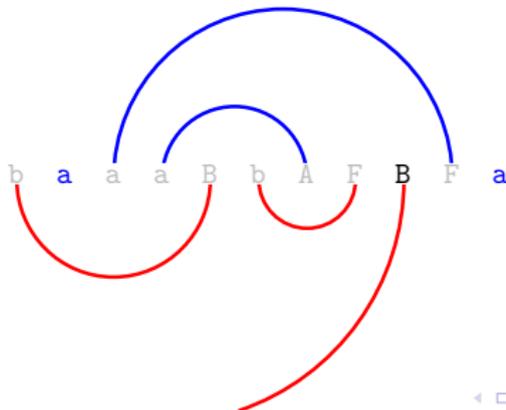
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet

$$\Theta = \{a, b, A, B, F\} \quad p \in [0, 1]$$

Distribution

$$\theta(p) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2}\right)$$

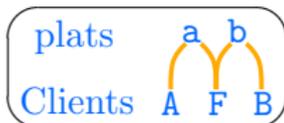
symétrie

$$a \leftrightarrow b$$

$$A \leftrightarrow B$$

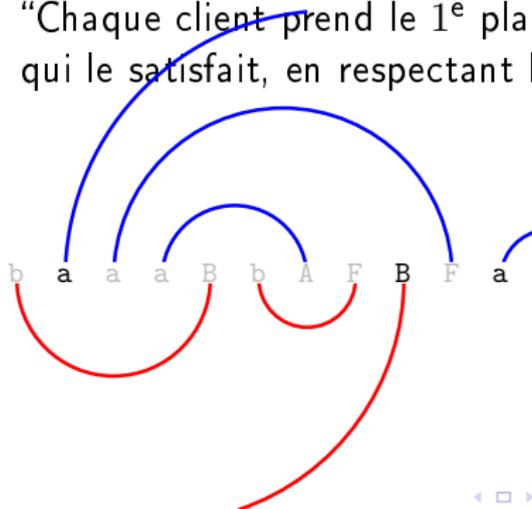
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

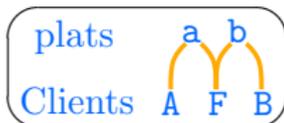
Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$ Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

symétrie

 $a \leftrightarrow b$ $A \leftrightarrow B$

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

"Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente."

b b a a a B b A F B F a A F

Mots aléatoires

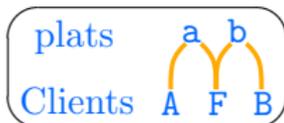
Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$ Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

symétrie

 $a \leftrightarrow b$ $A \leftrightarrow B$

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

"Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente."

Mots aléatoires

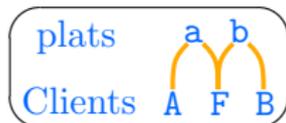
Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$ Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

symétrie

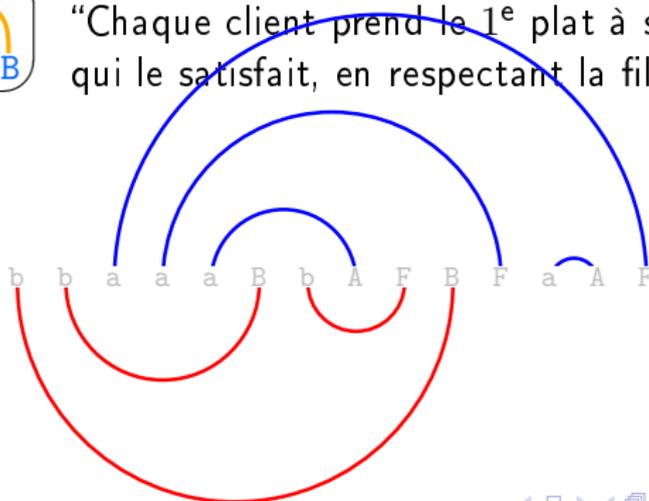
 $a \leftrightarrow b$ $A \leftrightarrow B$

Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

"Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente."

Mots aléatoires

Alphabet

$$\Theta = \{a, b, A, B, F\} \quad p \in [0, 1]$$

Distribution

$$\theta(p) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2}\right)$$

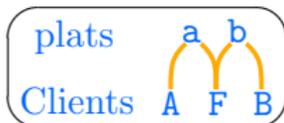
symétrie

$$a \leftrightarrow b$$

$$A \leftrightarrow B$$

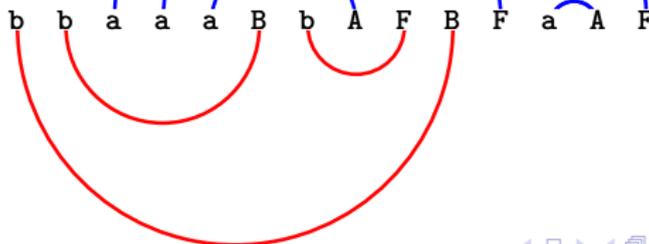
Métaphore du restaurant :

un mot = une file d'attente constituée de plats et de clients



Règle d'appariement des lettres :

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d'attente.”



Mots aléatoires

Alphabet

$$\Theta = \{a, b, A, B, F\} \quad p \in [0, 1]$$

Distribution

$$\theta(p) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2}\right)$$

symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

$$\mathcal{W}_n = \{w \in \Theta^{2n} \mid \text{toutes les lettres de } w \text{ sont appariées}\}$$

Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{a, b, A, B, F\}$ $p \in [0, 1]$

Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

symétrie

$a \leftrightarrow b$

$A \leftrightarrow B$

$\mathcal{W}_n = \{w \in \Theta^{2n} \mid \text{toutes les lettres de } w \text{ sont appariées}\}$

Distribution sur \mathcal{W}_n $\mathbb{P}_n^{(p)}(w) \propto \prod_{k=0}^{2n-1} \theta(w_k)$

Mots aléatoires

Alphabet $\Theta = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}\}$ $p \in [0, 1]$ Distribution $\theta(p) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{1-p}{4}, \frac{p}{2})$

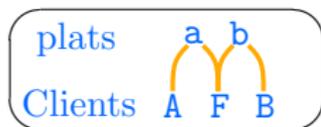
symétrie

 $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$ $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ $\mathcal{W}_n = \{w \in \Theta^{2n} \mid \text{toutes les lettres de } w \text{ sont appariées}\}$ Distribution sur \mathcal{W}_n $\mathbb{P}_n^{(p)}(w) \propto \prod_{k=0}^{2n-1} \theta(w_k)$

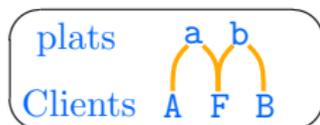
Proposition (Sheffield '11)

Il existe une bijection $(\mathcal{W}_n, \mathbb{P}_n^{(p)}) \rightarrow (\mathcal{M}_n, \mathbb{Q}_n^{(q)})$ qui préserve la mesure pour tout $q \in [0, \infty]$ et $p = \frac{\sqrt{q}}{2+\sqrt{q}}$.

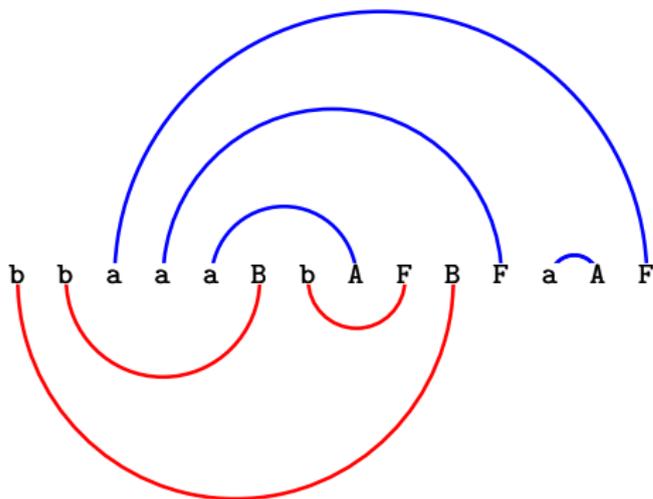
Mot \rightarrow graphe aux arches

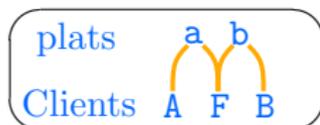
Mot \rightarrow graphe aux arches

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d’attente.”

Mot \rightarrow graphe aux arches

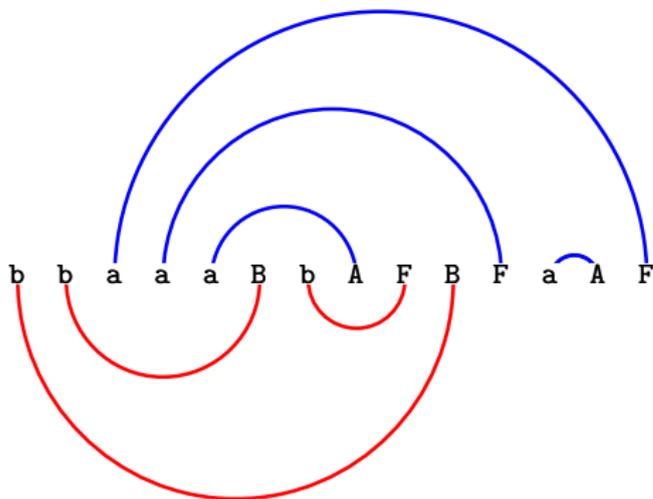
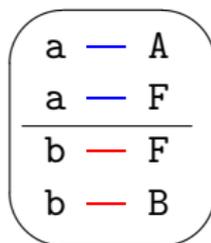
“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d’attente.”

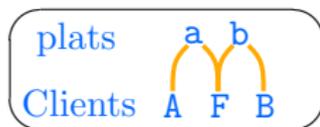


Mot \rightarrow graphe aux arches

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d’attente.”

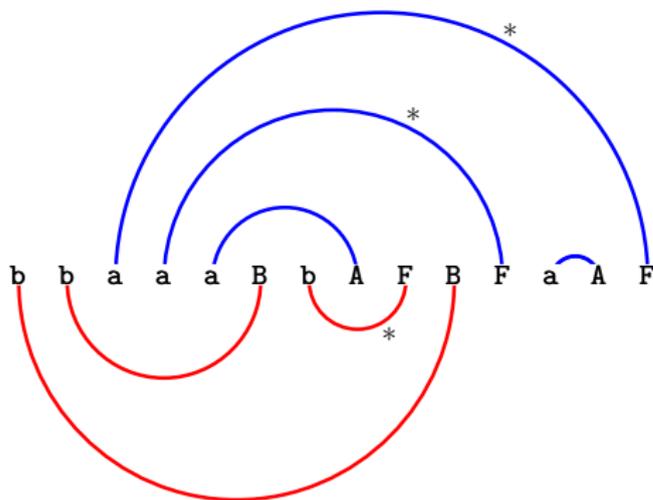
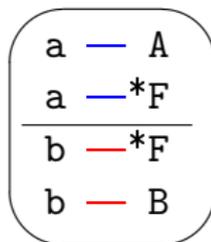
Conventions :

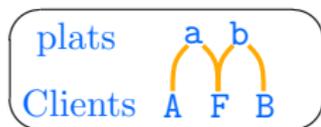


Mot \rightarrow graphe aux arches

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d’attente.”

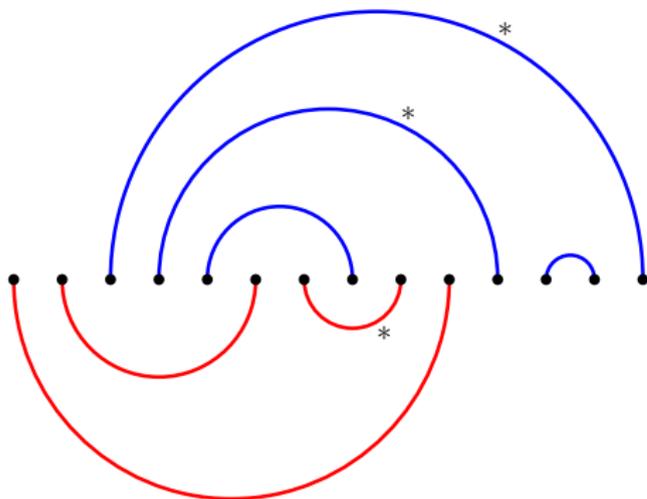
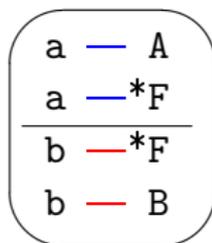
Conventions :

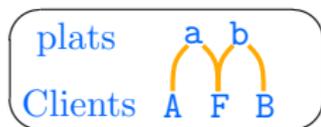


Mot \rightarrow graphe aux arches

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d’attente.”

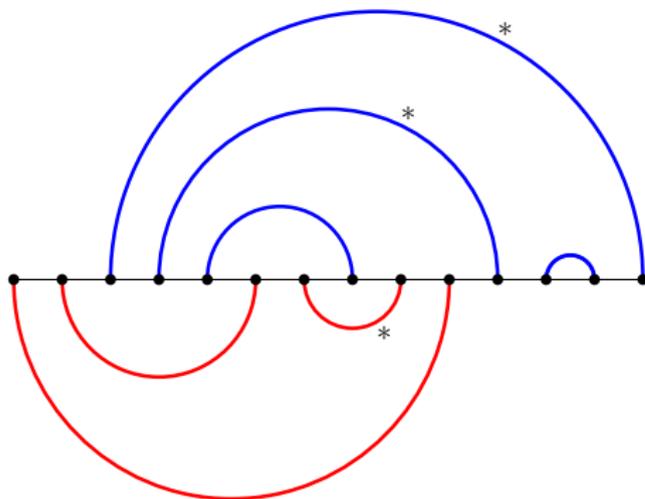
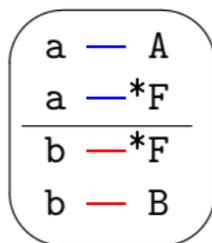
Conventions :

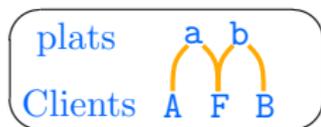


Mot \rightarrow graphe aux arches

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d’attente.”

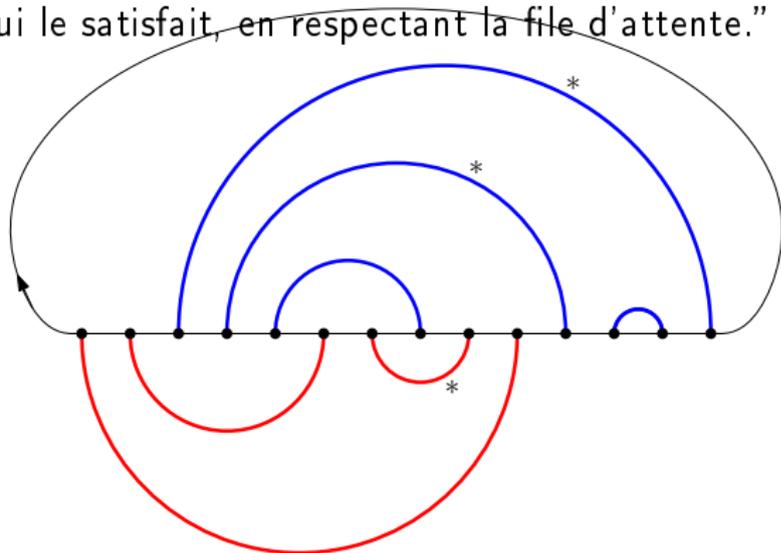
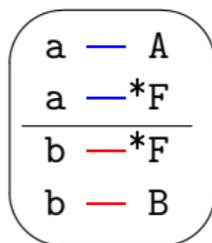
Conventions :

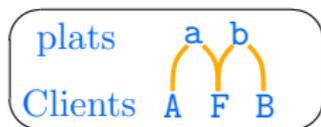


Mot \rightarrow graphe aux arches

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d’attente.”

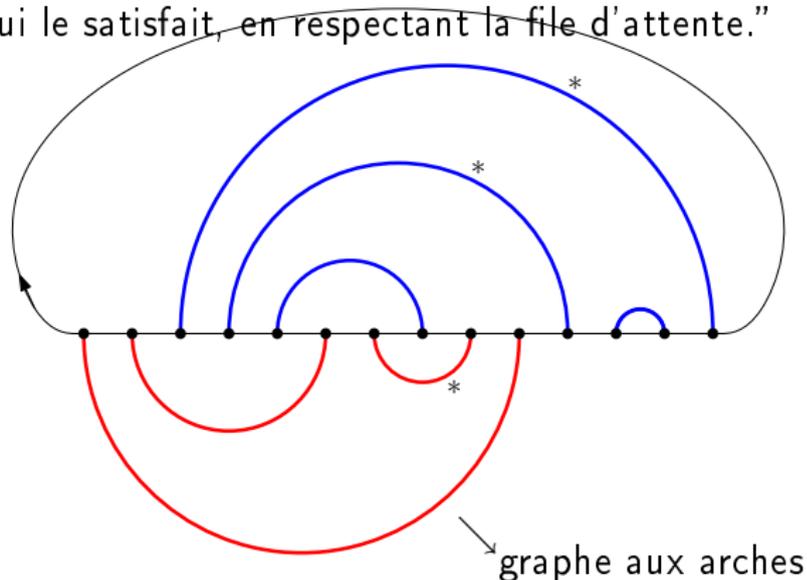
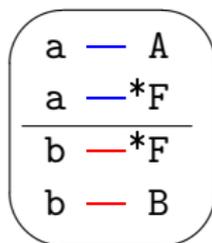
Conventions :

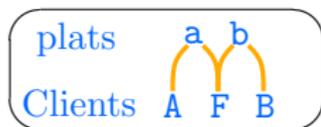


Mot \rightarrow graphe aux arches

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d’attente.”

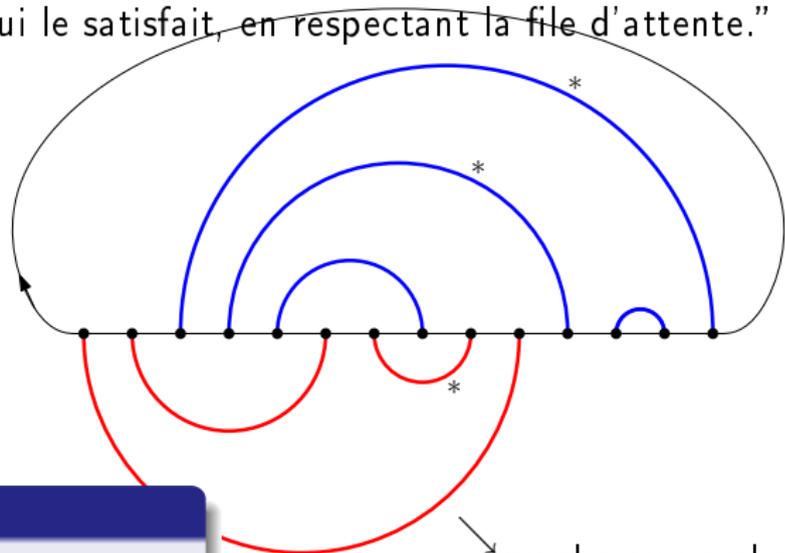
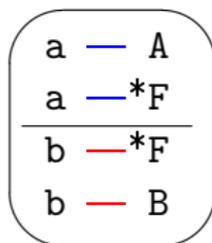
Conventions :



Mot \rightarrow graphe aux arches

“Chaque client prend le 1^e plat à sa gauche qui le satisfait, en respectant la file d’attente.”

Conventions :



graphe aux arches

Fait

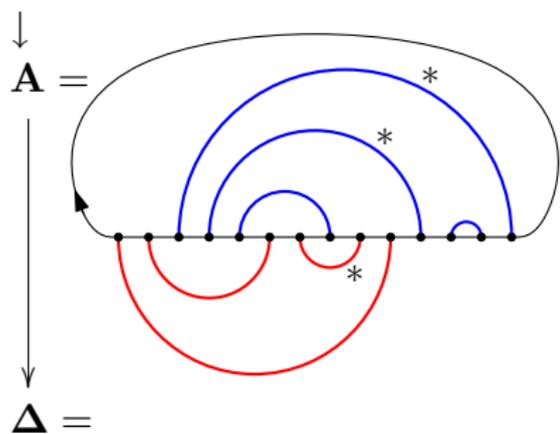
Les arches ne se croisent pas.

Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-grphe

$w = \mathbf{bbaaaBbAFBFaAF}$

Graphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

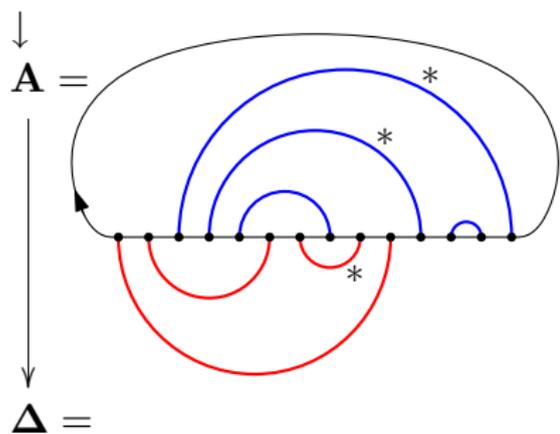
$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$



Graphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

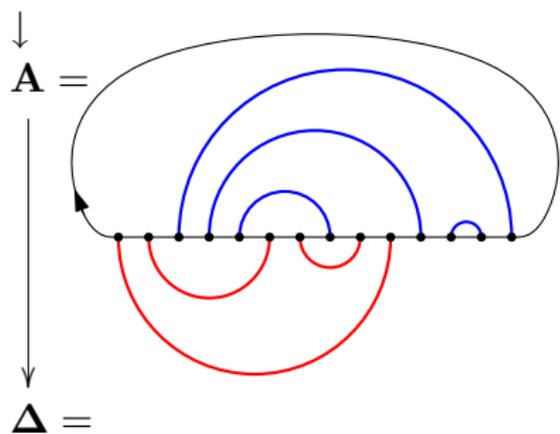
$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .



Graphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

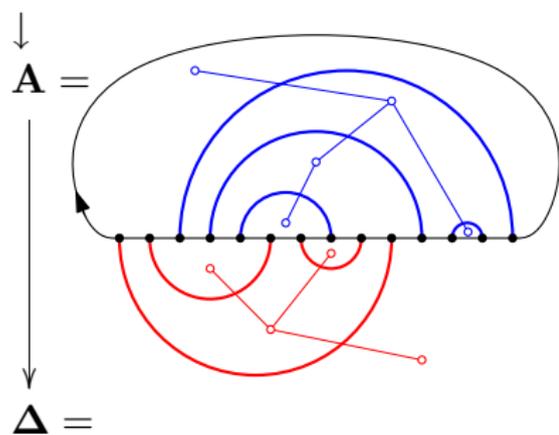
$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .



Graphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

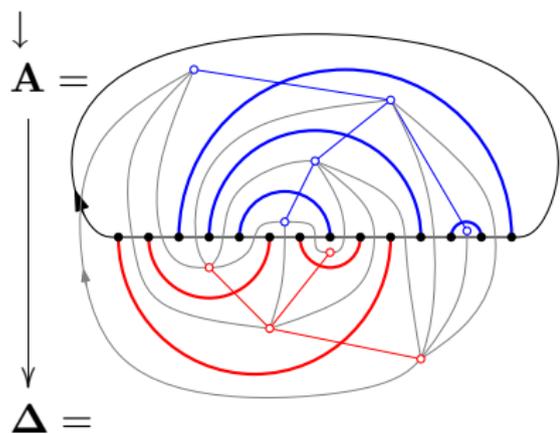
$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .



Graphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

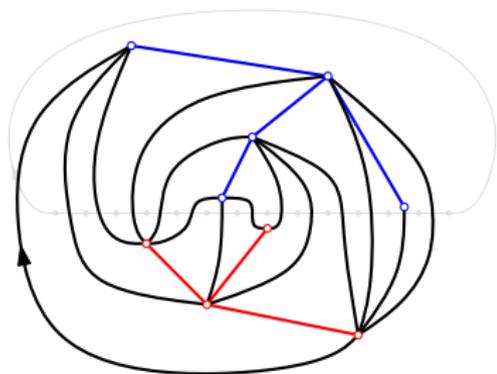
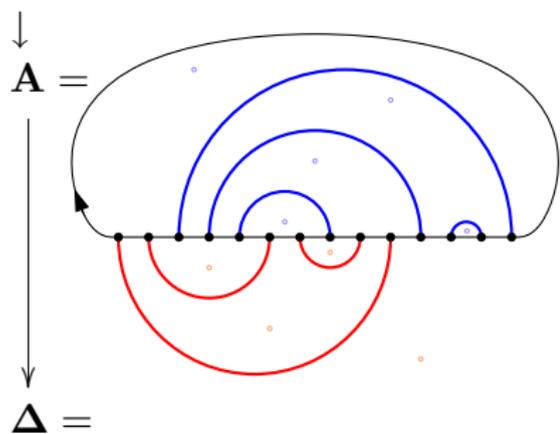
$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .



Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

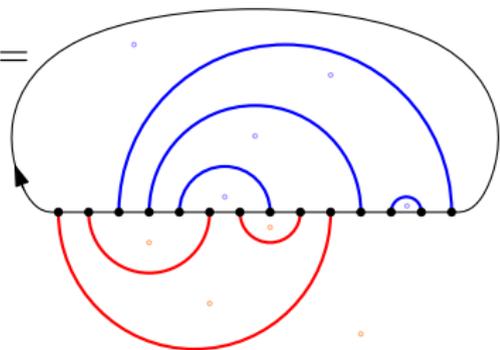


Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-grphe

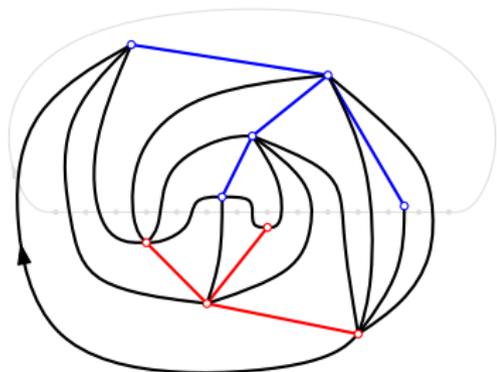
$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

\downarrow

$\mathbf{A} =$



$\Delta =$



$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

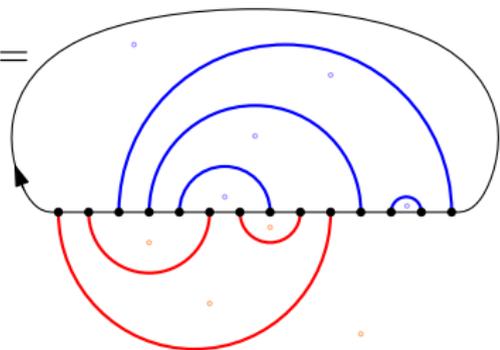
$\mathbf{Q} :=$ sous-grphe de Δ dual au sous-grphe des arches.

Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

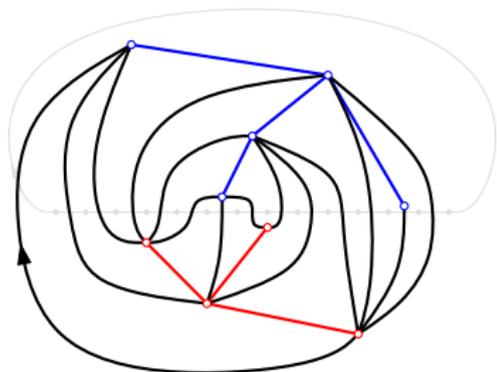
$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

\downarrow

$\mathbf{A} =$



$\Delta =$



$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-graphe de Δ dual au sous-graphe des arches.

Faits

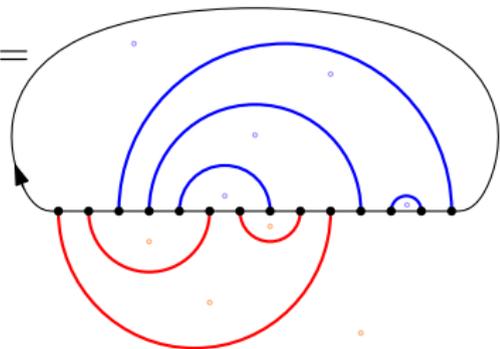
- Δ est une triangulation.

Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-grphe

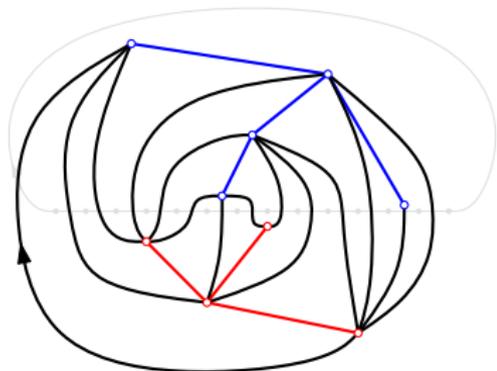
$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

\downarrow

$\mathbf{A} =$



$\Delta =$



$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-grphe de Δ dual au sous-grphe des arches.

Faits

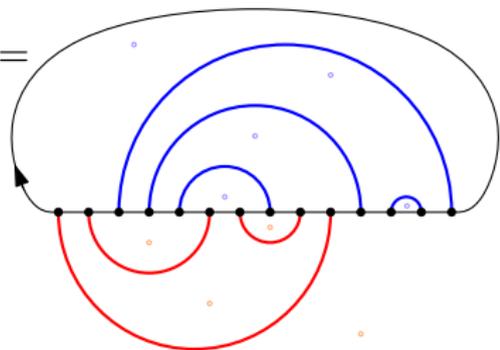
- Δ est une triangulation.
- \mathbf{Q} est une quadrangulation.

Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

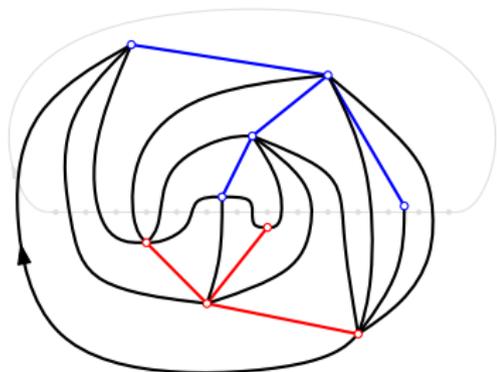
$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

\downarrow

$\mathbf{A} =$



$\Delta =$



$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-graphe de Δ dual au sous-graphe des arches.

Faits

- Δ est une triangulation.
- \mathbf{Q} est une quadrangulation.



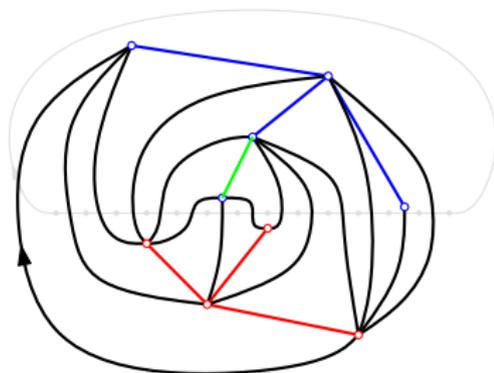
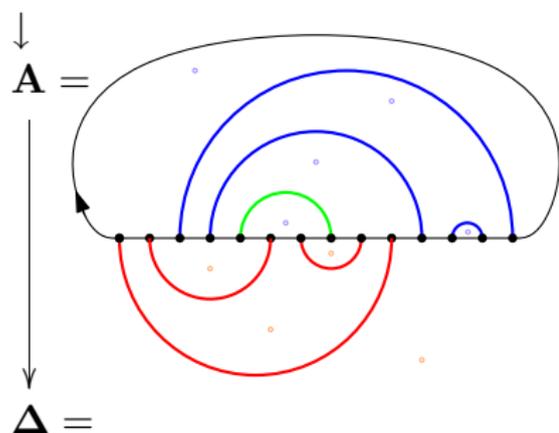
Propriété de la dualité

supprimer une arête

\Leftrightarrow contracter l'arête duale

Graphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$



$\mathbf{\Delta} :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-graphe de $\mathbf{\Delta}$ dual au sous-graphe des arches.

Faits

- $\mathbf{\Delta}$ est une triangulation.
- \mathbf{Q} est une quadrangulation.



Propriété de la dualité

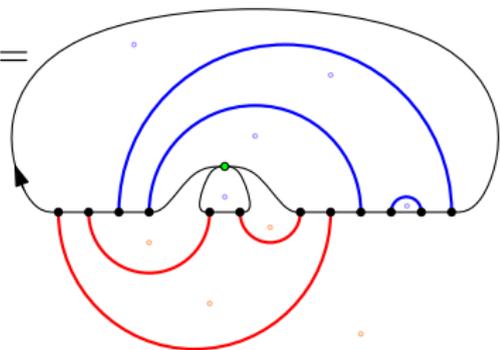
- supprimer une arête
- \Leftrightarrow contracter l'arête duale

Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

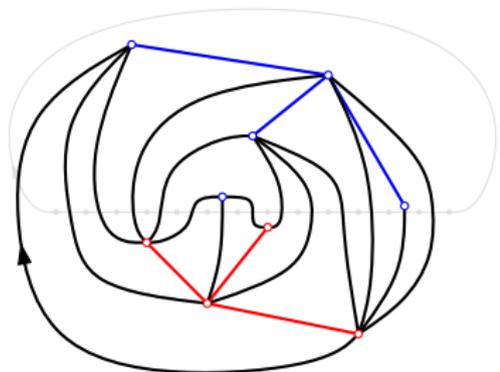
$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

\downarrow

$\mathbf{A} =$



$\Delta =$



$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-graphe de Δ dual au sous-graphe des arches.

Faits

- Δ est une triangulation.
- \mathbf{Q} est une quadrangulation.



Propriété de la dualité

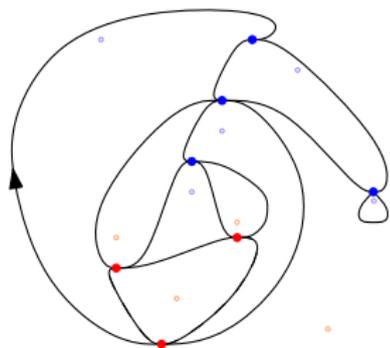
- supprimer une arête
- \Leftrightarrow contracter l'arête duale

Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

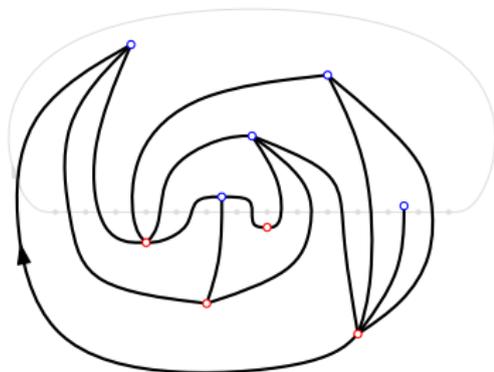
\downarrow

$\mathbf{A} =$



\downarrow

$\Delta =$



$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-graphe de Δ dual au sous-graphe des arches.

Faits

- Δ est une triangulation.
- \mathbf{Q} est une quadrangulation.



Propriété de la dualité

supprimer une arête

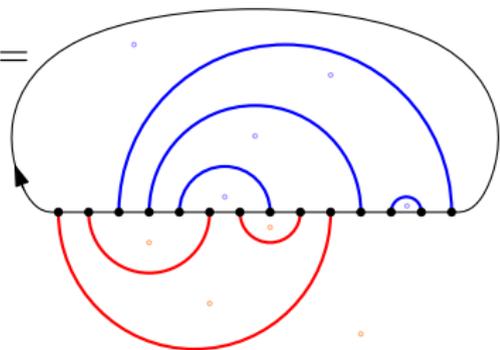
\Leftrightarrow contracter l'arête duale

Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-grphe

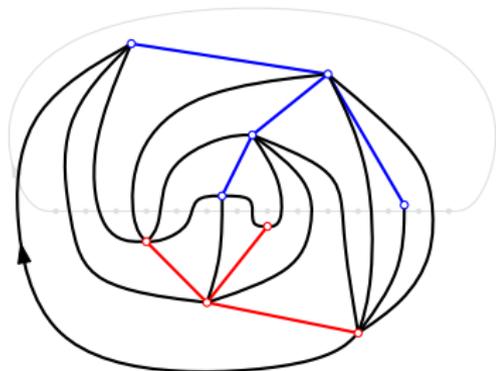
$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

\downarrow

$\mathbf{A} =$



$\Delta =$



$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-grphe de Δ dual au sous-grphe des arches.

Faits

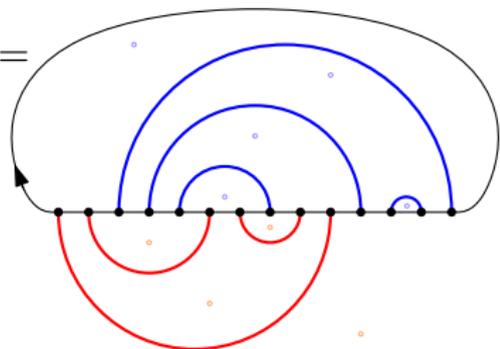
- Δ est une triangulation.
- \mathbf{Q} est une quadrangulation.
- $\Delta \setminus \mathbf{Q}$ est formé de 2 arbres.

Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-graphe

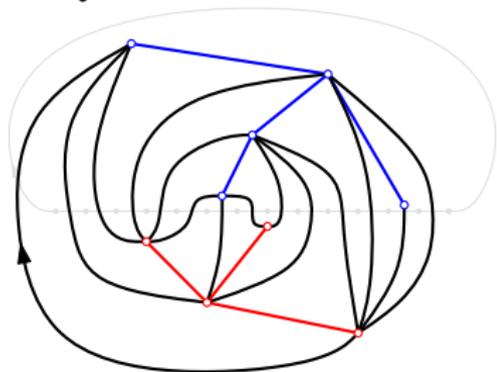
$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

\downarrow

$\mathbf{A} =$



$\Delta = \mathbf{Q} \cup \mathbf{T} \cup \mathbf{T}^\dagger$



$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-graphe de Δ dual au sous-graphe des arches.

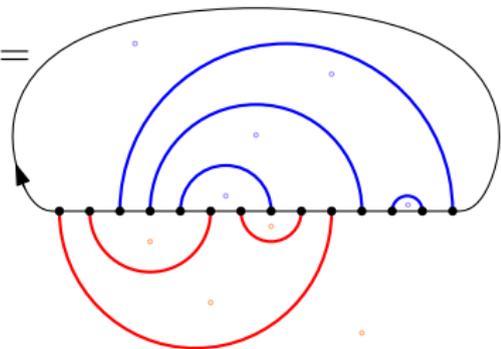
$\mathbf{T}, \mathbf{T}^\dagger :=$ les 2 arbres de $\Delta \setminus \mathbf{Q}$.

Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-grphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

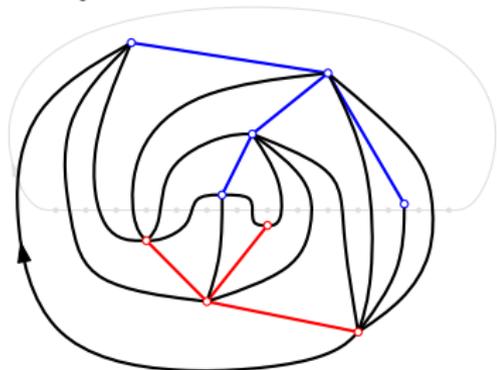
\downarrow

$\mathbf{A} =$



\downarrow

$\mathbf{\Delta} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{T} \cup \mathbf{T}^\dagger$



$\mathbf{\Delta} :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-grphe de $\mathbf{\Delta}$ dual au sous-grphe des arches.

$\mathbf{T}, \mathbf{T}^\dagger :=$ les 2 arbres de $\mathbf{\Delta} \setminus \mathbf{Q}$.

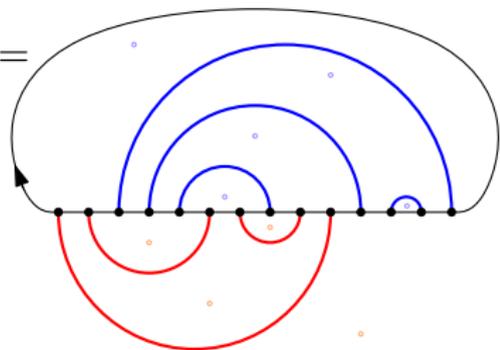
$\mathbf{M} :=$ la carte associée \mathbf{Q} par la bijection de Tutte.

Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-grphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$

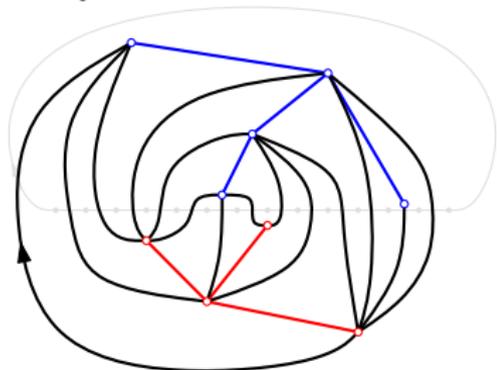
\downarrow

$\mathbf{A} =$



\downarrow

$\Delta = \mathbf{Q} \cup \mathbf{T} \cup \mathbf{T}^\dagger$

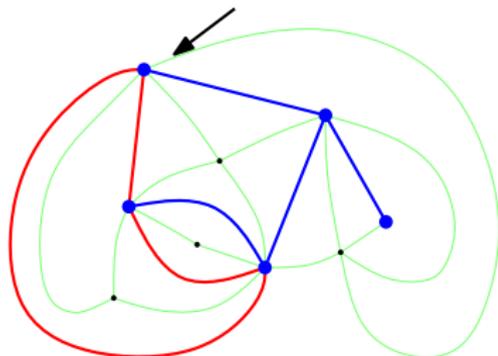


$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-grphe de Δ dual au sous-grphe des arches.

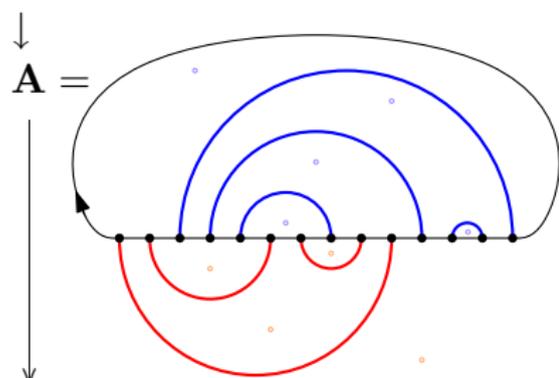
$\mathbf{T}, \mathbf{T}^\dagger :=$ les 2 arbres de $\Delta \setminus \mathbf{Q}$.

$\mathbf{M} :=$ la carte associée \mathbf{Q} par la bijection de Tutte.

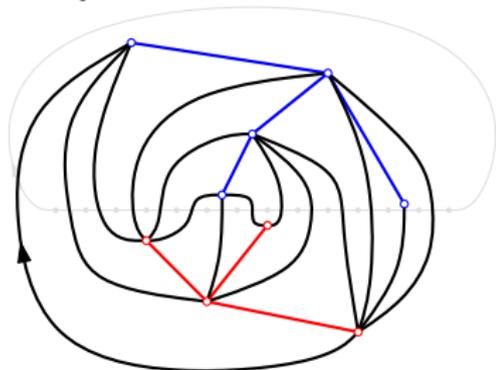


Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-grphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$



$\Delta = \mathbf{Q} \cup \mathbf{T} \cup \mathbf{T}^\dagger$



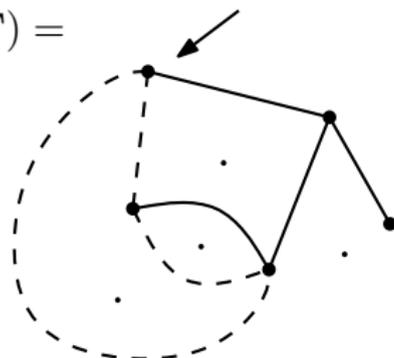
$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-grphe de Δ dual au sous-grphe des arches.

$\mathbf{T}, \mathbf{T}^\dagger :=$ les 2 arbres de $\Delta \setminus \mathbf{Q}$.

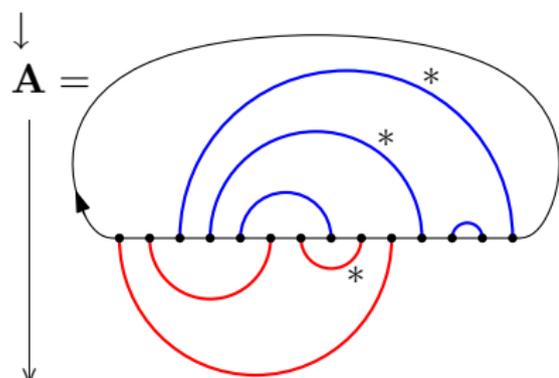
$\mathbf{M} :=$ la carte associée \mathbf{Q} par la bijection de Tutte.

$(\mathbf{M}, \mathbf{T}) =$

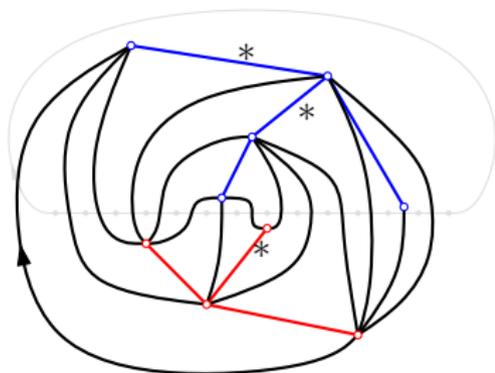


Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-grphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$



$\Delta = \mathbf{Q} \cup \mathbf{T} \cup \mathbf{T}^\dagger$



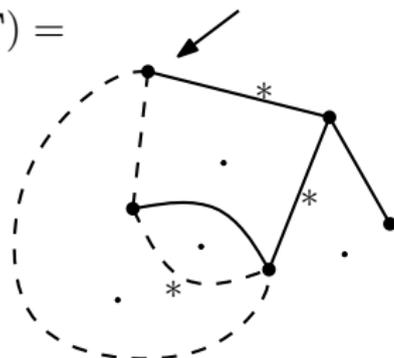
$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

$\mathbf{Q} :=$ sous-grphe de Δ dual au sous-grphe des arches.

$\mathbf{T}, \mathbf{T}^\dagger :=$ les 2 arbres de $\Delta \setminus \mathbf{Q}$.

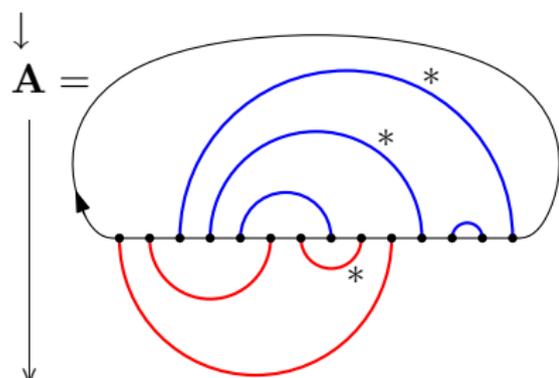
$\mathbf{M} :=$ la carte associée \mathbf{Q} par la bijection de Tutte.

$(\mathbf{M}, \mathbf{T}) =$

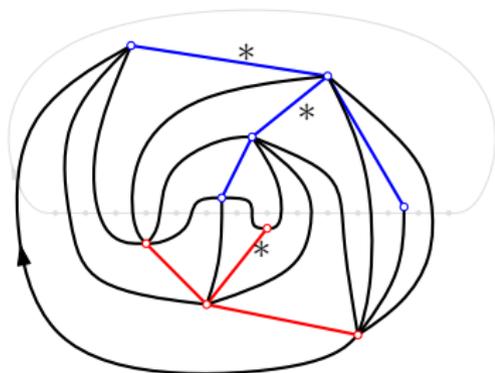


Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-grphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$



$\Delta = \mathbf{Q} \cup \mathbf{T} \cup \mathbf{T}^\dagger$



$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

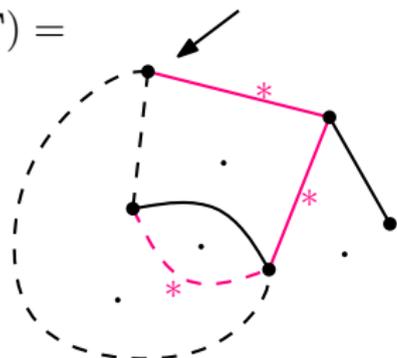
$\mathbf{Q} :=$ sous-grphe de Δ dual au sous-grphe des arches.

$\mathbf{T}, \mathbf{T}^\dagger :=$ les 2 arbres de $\Delta \setminus \mathbf{Q}$.

$\mathbf{M} :=$ la carte associée \mathbf{Q} par la bijection de Tutte.

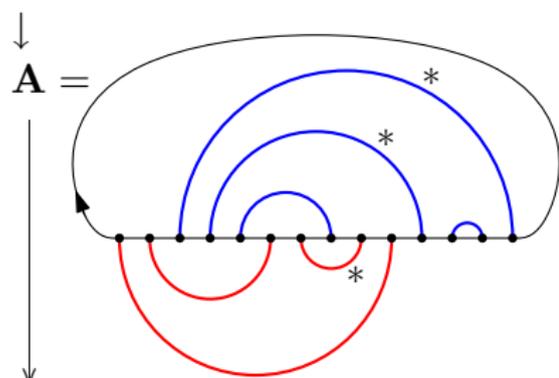
$\mathbf{G} \rightsquigarrow$ changer le statut de toutes les arêtes marquées par \star par rapport \mathbf{T} .

$(\mathbf{M}, \mathbf{T}) =$

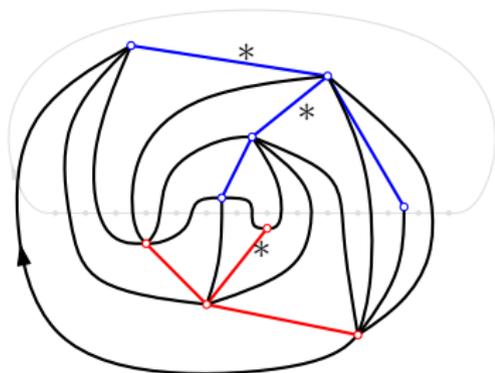


Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-grphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$



$\Delta = \mathbf{Q} \cup \mathbf{T} \cup \mathbf{T}^\dagger$



$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

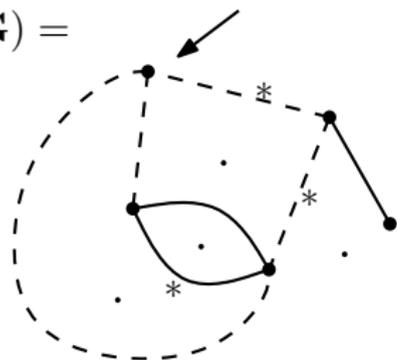
$\mathbf{Q} :=$ sous-grphe de Δ dual au sous-grphe des arches.

$\mathbf{T}, \mathbf{T}^\dagger :=$ les 2 arbres de $\Delta \setminus \mathbf{Q}$.

$\mathbf{M} :=$ la carte associée \mathbf{Q} par la bijection de Tutte.

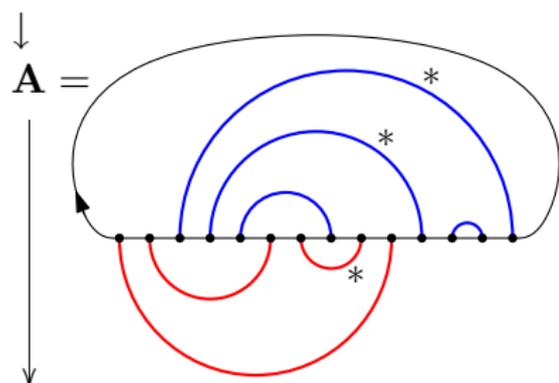
$\mathbf{G} \rightsquigarrow$ changer le statut de toutes les arêtes marquées par \star par rapport \mathbf{T} .

$(\mathbf{M}, \mathbf{G}) =$

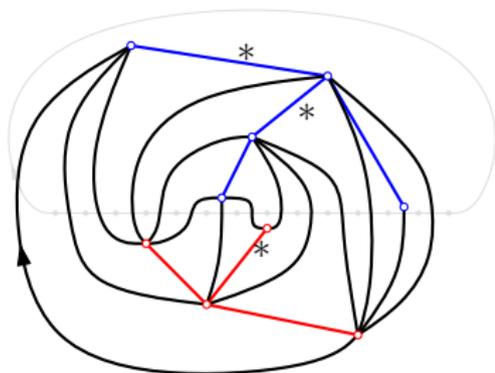


Grphe aux arches \rightarrow carte + sous-grphe

$w = \text{bbaaaBbAFBFaAF}$



$\Delta = \mathbf{Q} \cup \mathbf{T} \cup \mathbf{T}^\dagger$



$\Delta :=$ carte duale de \mathbf{A} .

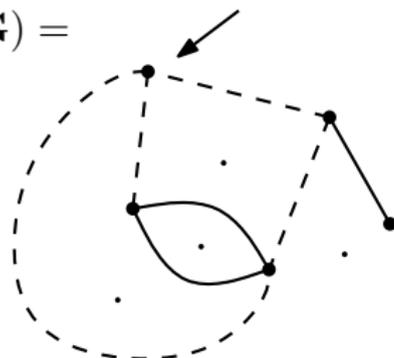
$\mathbf{Q} :=$ sous-grphe de Δ dual au sous-grphe des arches.

$\mathbf{T}, \mathbf{T}^\dagger :=$ les 2 arbres de $\Delta \setminus \mathbf{Q}$.

$\mathbf{M} :=$ la carte associée \mathbf{Q} par la bijection de Tutte.

$\mathbf{G} \rightsquigarrow$ changer le statut de toutes les arêtes marquées par \star par rapport \mathbf{T} .

$(\mathbf{M}, \mathbf{G}) =$



La bijection hamburger-cheeseburger

Proposition (Sheffield '11)

L'application $\mathcal{W}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$
 $w \mapsto (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est bijective, et on a $L = 1 + (\#\mathbf{F})w$.

$L :=$ le nombre de boucles séparant \mathbf{G} et \mathbf{G}^\dagger

$(\#\mathbf{F})w :=$ le nombre de \mathbf{F} dans w

La bijection hamburger-cheeseburger

Proposition (Sheffield '11)

L'application $\mathcal{W}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$
 $w \mapsto (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est bijective, et on a $L = 1 + (\#\mathbf{F})w$.

i.e. $(\mathcal{W}_n, \mathbb{P}_n^{(p)}) \rightarrow (\mathcal{M}_n, \mathbb{Q}_n^{(q)})$ préserve la mesure quand $p = \frac{\sqrt{q}}{2+\sqrt{q}}$.

La bijection hamburger-cheeseburger

Proposition (Sheffield '11)

L'application $\mathcal{W}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$
 $w \mapsto (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est bijective, et on a $L = 1 + (\#\mathbf{F})w$.

i.e. $(\mathcal{W}_n, \mathbb{P}_n^{(p)}) \rightarrow (\mathcal{M}_n, \mathbb{Q}_n^{(q)})$ préserve la mesure quand $p = \frac{\sqrt{q}}{2+\sqrt{q}}$.

↑

Pour tout $w \in \mathcal{W}_n$,

$$\theta^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{F} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{p}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n^{(p)}(w) &\propto \prod_{k=0}^{2n-1} \theta^{(p)}(w_k) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1-p}{4}\right)^{n-(\#\mathbf{F})} \left(\frac{p}{2}\right)^{(\#\mathbf{F})} \\ &\propto \left(\frac{2p}{1-p}\right)^{(\#\mathbf{F})} \propto \left(\frac{2p}{1-p}\right)^L \end{aligned}$$

Donc la bijection préserve la mesure quand $\sqrt{q} = \frac{2p}{1-p}$.

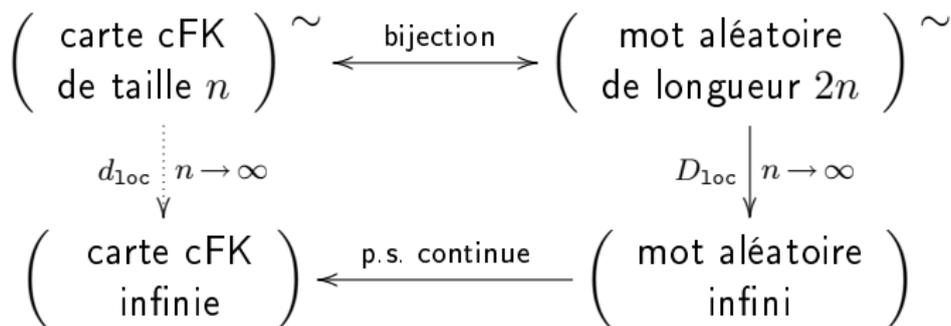
Limite locale des cartes cFK

Théorème (Existence de la limite locale)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_n^{(q)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ faiblement pour d_{loc} .

Théorème (Propriétés de la limite)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ -presque sûrement, la carte \mathbf{M} a un seul bout (one-ended), et la marche aléatoire simple sur \mathbf{M} est récurrente.



La bijection hamburger-cheeseburger \sim

Proposition (Sheffield '11 \sim)

L'application $\begin{matrix} \widetilde{\mathcal{W}}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_n \\ w \mapsto (\mathbf{M}, \mathbf{G}) \end{matrix}$ est bijective, et on a $L = 1 + (\#\mathbf{F})w$.

i.e. $(\widetilde{\mathcal{W}}_n, \widetilde{\mathbb{P}}_n^{(p)}) \rightarrow (\widetilde{\mathcal{M}}_n, \widetilde{\mathbb{Q}}_n^{(q)})$ préserve la mesure quand $p = \frac{\sqrt{q}}{2+\sqrt{q}}$.

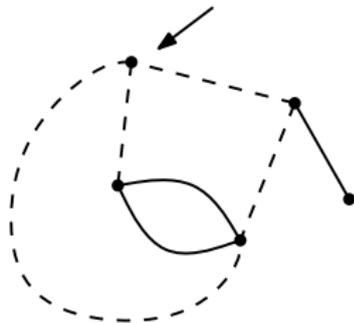
La bijection hamburger-cheeseburger \sim

Proposition (Sheffield '11 \sim)

L'application $\widetilde{\mathcal{W}}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_n$
 $w \mapsto (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est bijective, et on a $L = 1 + (\#\mathbf{F})w$.

i.e. $(\widetilde{\mathcal{W}}_n, \widetilde{\mathbb{P}}_n^{(p)}) \rightarrow (\widetilde{\mathcal{M}}_n, \widetilde{\mathbb{Q}}_n^{(q)})$ préserve la mesure quand $p = \frac{\sqrt{q}}{2 + \sqrt{q}}$.

b b a a a B b A F B F a A F



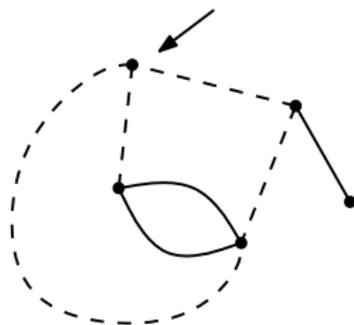
La bijection hamburger-cheeseburger \sim

Proposition (Sheffield '11 \sim)

L'application $\widetilde{\mathcal{W}}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_n$
 $w \mapsto (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est bijective, et on a $L = 1 + (\#\mathbf{F})w$.

i.e. $(\widetilde{\mathcal{W}}_n, \widetilde{\mathbb{P}}_n^{(p)}) \rightarrow (\widetilde{\mathcal{M}}_n, \widetilde{\mathbb{Q}}_n^{(q)})$ préserve la mesure quand $p = \frac{\sqrt{q}}{2+\sqrt{q}}$.

↓
 b b a a a B b A F B F a A F
 0 1 2 3 4 13



La bijection hamburger-cheeseburger \sim

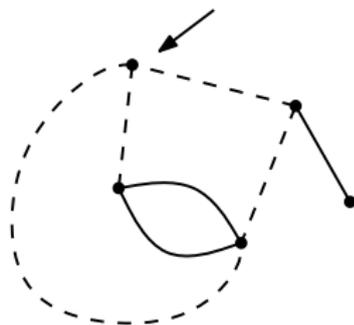
Proposition (Sheffield '11 \sim)

L'application $\widetilde{\mathcal{W}}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_n$
 $w \mapsto (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est bijective, et on a $L = 1 + (\#\mathbf{F})w$.

i.e. $(\widetilde{\mathcal{W}}_n, \widetilde{\mathbb{P}}_n^{(p)}) \rightarrow (\widetilde{\mathcal{M}}_n, \widetilde{\mathbb{Q}}_n^{(q)})$ préserve la mesure quand $p = \frac{\sqrt{q}}{2+\sqrt{q}}$.

$w \sim$ translation des indices

↓	b	b	a	a	a	B	b	A	F	B	F	a	A	F
↓	-4	...	-1	0	1	2	8	9				



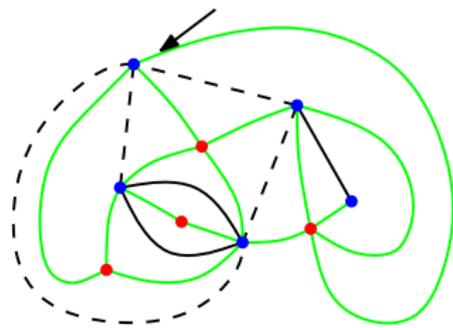
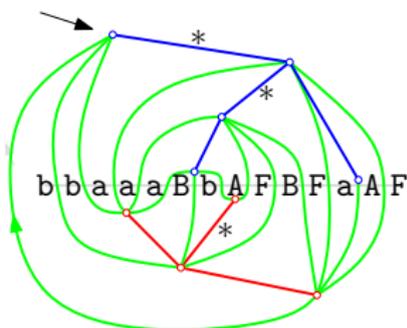
La bijection hamburger-cheeseburger \sim

Proposition (Sheffield '11 \sim)

L'application $\widetilde{\mathcal{W}}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_n$
 $w \mapsto (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est bijective, et on a $L = 1 + (\#\mathbf{F})w$.

i.e. $(\widetilde{\mathcal{W}}_n, \widetilde{\mathbb{P}}_n^{(p)}) \rightarrow (\widetilde{\mathcal{M}}_n, \widetilde{\mathbb{Q}}_n^{(q)})$ préserve la mesure quand $p = \frac{\sqrt{q}}{2+\sqrt{q}}$.

$w \sim$ translation des indices



La bijection hamburger-cheeseburger \sim

Proposition (Sheffield '11 \sim)

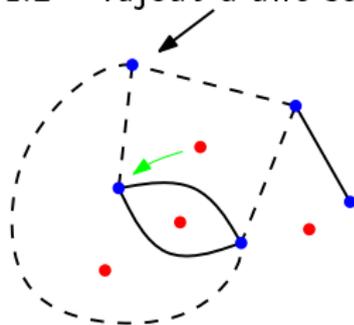
L'application $\widetilde{\mathcal{W}}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_n$
 $w \mapsto (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est bijective, et on a $L = 1 + (\#\mathbf{F})w$.

i.e. $(\widetilde{\mathcal{W}}_n, \widetilde{\mathbb{P}}_n^{(p)}) \rightarrow (\widetilde{\mathcal{M}}_n, \widetilde{\mathbb{Q}}_n^{(q)})$ préserve la mesure quand $p = \frac{\sqrt{q}}{2+\sqrt{q}}$.

$w \sim$ translation des indices

$\mathbf{M} \sim$ rajout d'une second racine

\downarrow \downarrow
 b b a a a B b A F B F a A F
 -4 ... -1 0 1 2 8 9



La bijection hamburger-cheeseburger \sim

Proposition (Sheffield '11 \sim)

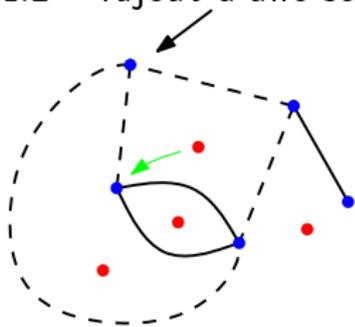
L'application $\widetilde{\mathcal{W}}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_n$
 $w \mapsto (\mathbf{M}, \mathbf{G})$ est bijective, et on a $L = 1 + (\#\mathbf{F})w$.

i.e. $(\widetilde{\mathcal{W}}_n, \widetilde{\mathbb{P}}_n^{(p)}) \rightarrow (\widetilde{\mathcal{M}}_n, \widetilde{\mathbb{Q}}_n^{(q)})$ préserve la mesure quand $p = \frac{\sqrt{q}}{2+\sqrt{q}}$.

$w \sim$ translation des indices

$\mathbf{M} \sim$ rajout d'une second racine

\downarrow \downarrow
 b b a a a B b A F B F a A F
 -4 ... -1 0 1 2 8 9



Pour tout $(w, w') \in \widetilde{\mathcal{W}}_n$,

$$D_{\text{loc}}(w, w') = \inf \left\{ 2^{-R} \mid w_{[-R, R]} = w'_{[-R, R]} \right\}$$

La limite locale des mots

Soient $\mathbb{P}_\infty^{(p)} := \theta(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$ et $W^{(p)}$ un mot aléatoire de loi $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$.

La limite locale des mots

Soient $\mathbb{P}_\infty^{(p)} := \theta(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$ et $W^{(p)}$ un mot aléatoire de loi $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$.

$$\theta(p) : \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{F} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{p}{2} \end{pmatrix} \quad p \in [0, 1]$$

La limite locale des mots

Soient $\mathbb{P}_\infty^{(p)} := \theta(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$ et $W^{(p)}$ un mot aléatoire de loi $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$.

$$\theta(p) : \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{F} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{p}{2} \end{pmatrix} \quad p \in [0, 1]$$

Lemme (Convergence locale des mots)

Pour tout $p \in [0, 1]$, on a $\tilde{\mathbb{P}}_n^{(p)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}_\infty^{(p)}$ faiblement pour D_{loc} .

La limite locale des mots

Soient $\mathbb{P}_\infty^{(p)} := \theta(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$ et $W^{(p)}$ un mot aléatoire de loi $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$.

$$\theta(p) : \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{F} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{p}{2} \end{pmatrix} \quad p \in [0, 1]$$

Lemme (Convergence locale des mots)

Pour tout $p \in [0, 1]$, on a $\tilde{\mathbb{P}}_n^{(p)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}_\infty^{(p)}$ faiblement pour D_{loc} .

Exemple (le cas $p = 1$) : $w = \mathbf{b} \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{a} \mathbf{F} \mathbf{a} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{F} \mathbf{F}$

La limite locale des mots

Soient $\mathbb{P}_\infty^{(p)} := \theta(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$ et $W^{(p)}$ un mot aléatoire de loi $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$.

$$\theta(p) : \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{F} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{p}{2} \end{pmatrix} \quad p \in [0, 1]$$

Lemme (Convergence locale des mots)

Pour tout $p \in [0, 1]$, on a $\tilde{\mathbb{P}}_n^{(p)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}_\infty^{(p)}$ faiblement pour D_{loc} .

Exemple (le cas $p = 1$) : $w = \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{F} \mathbf{x} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{F} \mathbf{F}$

La limite locale des mots

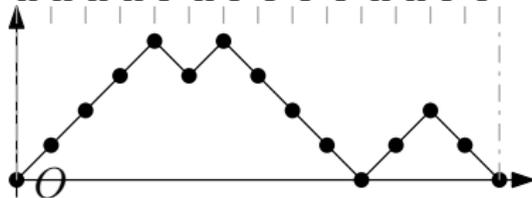
Soient $\mathbb{P}_\infty^{(p)} := \theta(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$ et $W^{(p)}$ un mot aléatoire de loi $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$.

$$\theta(p) : \begin{pmatrix} a & b & A & B & F \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{p}{2} \end{pmatrix} \quad p \in [0, 1]$$

Lemme (Convergence locale des mots)

Pour tout $p \in [0, 1]$, on a $\tilde{\mathbb{P}}_n^{(p)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}_\infty^{(p)}$ faiblement pour D_{loc} .

Exemple (le cas $p = 1$) : $w = x x x x F x F F F F x x F F$



La limite locale des mots

Soient $\mathbb{P}_\infty^{(p)} := \theta(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$ et $W^{(p)}$ un mot aléatoire de loi $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$.

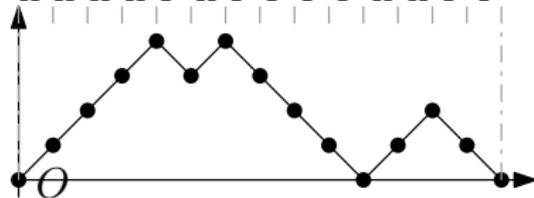
$$\theta(p) : \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{F} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{p}{2} \end{pmatrix} \quad p \in [0, 1]$$

Lemme (Convergence locale des mots)

Pour tout $p \in [0, 1]$, on a $\tilde{\mathbb{P}}_n^{(p)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}_\infty^{(p)}$ faiblement pour D_{loc} .

Exemple (le cas $p = 1$) : $w = \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{F} \mathbf{x} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{F} \mathbf{F}$

$\mathbb{P}_n^{(1)} \rightsquigarrow$ la mesure uniforme
 sur les excursions
 de longueur $2n$.



La limite locale des mots

Soient $\mathbb{P}_\infty^{(p)} := \theta(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$ et $W^{(p)}$ un mot aléatoire de loi $\mathbb{P}_\infty^{(p)}$.

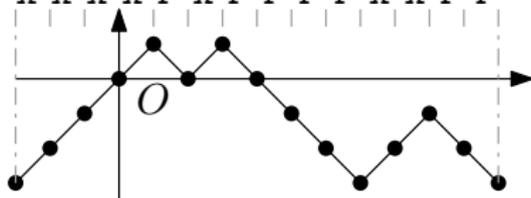
$$\theta(p) : \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{F} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{1-p}{4} & \frac{p}{2} \end{pmatrix} \quad p \in [0, 1]$$

Lemme (Convergence locale des mots)

Pour tout $p \in [0, 1]$, on a $\tilde{\mathbb{P}}_n^{(p)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}_\infty^{(p)}$ faiblement pour D_{loc} .

Exemple (le cas $p = 1$) : $w = \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{F} \mathbf{x} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{F} \mathbf{F}$
 $\mathbb{P}_n^{(1)} \rightsquigarrow$ la mesure uniforme
 sur les excursions
 de longueur $2n$.

$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{translation}}$ loi de la marche
 aléatoire non-
 conditionnée



Limite locale des cartes cFK

Théorème (Existence de la limite locale)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_n^{(q)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ faiblement pour d_{loc} .

Théorème (Propriétés de la limite)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ -presque sûrement, la carte \mathbf{M} a un seul bout (one-ended), et la marche aléatoire simple sur \mathbf{M} est récurrente.

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\begin{array}{l} \text{carte cFK} \\ \text{de taille } n \end{array} \right) \sim & \xleftrightarrow{\text{bijection}} & \left(\begin{array}{l} \text{mot aléatoire} \\ \text{de longueur } 2n \end{array} \right) \sim \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ d_{\text{loc}} \\ \downarrow \\ n \rightarrow \infty \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ D_{\text{loc}} \\ n \rightarrow \infty \end{array} \\
 \left(\begin{array}{l} \text{carte cFK} \\ \text{infinie} \end{array} \right) & \xleftarrow{\text{p.s. continue}} & \left(\begin{array}{l} \text{mot aléatoire} \\ \text{infini} \end{array} \right)
 \end{array}$$

La limite locale des mots

Lemme (Propriétés de la limite)

p.s. ① *Toutes les lettres de $W^{(p)}$ sont appariées.*

La limite locale des mots

Lemme (Propriétés de la limite)

- p.s.*
- 1 Toutes les lettres de $W^{(p)}$ sont appariées.
 - 2 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il y a un nombre infini de "a" d'indice $< k$ dont le partenaire est d'indice $> k$. Idem pour "b".

La limite locale des mots

Lemme (Propriétés de la limite)

- p.s.*
- 1 Toutes les lettres de $W^{(p)}$ sont appariées.
 - 2 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il y a un nombre infini de "a" d'indice $< k$ dont le partenaire est d'indice $> k$. Idem pour "b".

- i.e.*
- 1 Toutes les arches se referment.

La limite locale des mots

Lemme (Propriétés de la limite)

- p.s.*
- 1 Toutes les lettres de $W^{(p)}$ sont appariées.
 - 2 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il y a un nombre infini de "a" d'indice $< k$ dont le partenaire est d'indice $> k$. Idem pour "b".

i.e.

- 1 Toutes les arches se referment.
- 2 Il y a un nombre infini d'arches au-dessus de chaque point de l'axe réel. Idem pour en-dessous.

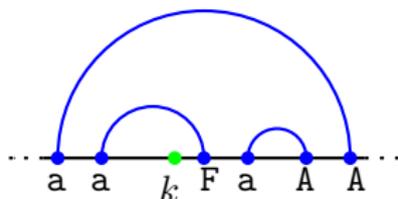
La limite locale des mots

Lemme (Propriétés de la limite)

- p.s.*
- 1 Toutes les lettres de $W^{(p)}$ sont appariées.
 - 2 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il y a un nombre infini de "a" d'indice $< k$ dont le partenaire est d'indice $> k$. Idem pour "b".

i.e.

- 1 Toutes les arches se referment.
- 2 Il y a un nombre infini d'arches au-dessus de chaque point de l'axe réel. Idem pour en-dessous.



La limite locale des mots

Lemme (Propriétés de la limite)

- p.s.* ① *Toutes les arches de \mathbf{A} se referment.*
- ② *Il y a un nombre infini d'arches au-dessus de chaque point de l'axe réel. Idem pour en-dessous.*

La limite locale des mots

Lemme (Propriétés de la limite)

- p.s.* ① *Toutes les arches de \mathbf{A} se referment.*
- ② *Il y a un nombre infini d'arches au-dessus de chaque point de l'axe réel. Idem pour en-dessous.*

Conséquence : Soit $w_0 \in \Theta^{\mathbb{Z}}$ un mot qui satisfait ① et ②

La limite locale des mots

Lemme (Propriétés de la limite)

p.s. ① Toutes les arches de \mathbf{A} se referment.

② Il y a un nombre infini d'arches au-dessus de chaque point de l'axe réel. Idem pour en-dessous.

Conséquence : Soit $w_0 \in \Theta^{\mathbb{Z}}$ un mot qui satisfait ① et ②

① $\Rightarrow w \mapsto \mathbf{A}$ est continue en w_0 pour la topologie locale.

La limite locale des mots

Lemme (Propriétés de la limite)

p.s. ① Toutes les arches de \mathbf{A} se referment.

② Il y a un nombre infini d'arches au-dessus de chaque point de l'axe réel. Idem pour en-dessous.

Conséquence : Soit $w_0 \in \Theta^{\mathbb{Z}}$ un mot qui satisfait ① et ②

① $\Rightarrow w \mapsto \mathbf{A}$ est continue en w_0 pour la topologie locale.

② \Rightarrow Toute face de \mathbf{A} est de degré fini.

\Rightarrow l'application dualité $\mathbf{A} \mapsto \Delta$ est continue en \mathbf{A}_0 .

La limite locale des mots

Lemme (Propriétés de la limite)

- p.s.* ① *Toutes les arches de \mathbf{A} se referment.*
- ② *Il y a un nombre infini d'arches au-dessus de chaque point de l'axe réel. Idem pour en-dessous.*

Conséquence : Soit $w_0 \in \Theta^{\mathbb{Z}}$ un mot qui satisfait ① et ②

① $\Rightarrow w \mapsto \mathbf{A}$ est continue en w_0 pour la topologie locale.

② \Rightarrow Toute face de \mathbf{A} est de degré fini.

\Rightarrow l'application dualité $\mathbf{A} \mapsto \Delta$ est continue en \mathbf{A}_0 .

Corollaire

La bijection de hamburger-cheeseburger se prolonge en une fonction continue $\mathbb{P}_{\infty}^{(p)}$ -p.s. pour tout $p \in [0, 1]$.

Limite locale des cartes cFK

Théorème (Existence de la limite locale)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_n^{(q)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ faiblement pour d_{loc} .

Théorème (Propriétés de la limite)

Pour tout $q \in [0, \infty]$, $\mathbb{Q}_\infty^{(q)}$ -presque sûrement, la carte \mathbf{M} a un seul bout (one-ended), et la marche aléatoire simple sur \mathbf{M} est récurrente.

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\begin{array}{c} \text{carte cFK} \\ \text{de taille } n \end{array} \right) \sim & \xleftrightarrow{\text{bijection}} & \left(\begin{array}{c} \text{mot aléatoire} \\ \text{de longueur } 2n \end{array} \right) \sim \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ d_{\text{loc}} \\ \downarrow \\ n \rightarrow \infty \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ D_{\text{loc}} \\ n \rightarrow \infty \end{array} \\
 \left(\begin{array}{c} \text{carte cFK} \\ \text{infinie} \end{array} \right) & \xleftarrow{\text{p.s. continue}} & \left(\begin{array}{c} \text{mot aléatoire} \\ \text{infini} \end{array} \right)
 \end{array}$$

Propriétés de la carte cFK infinie

① One-endedness

Propriétés de la carte cFK infinie

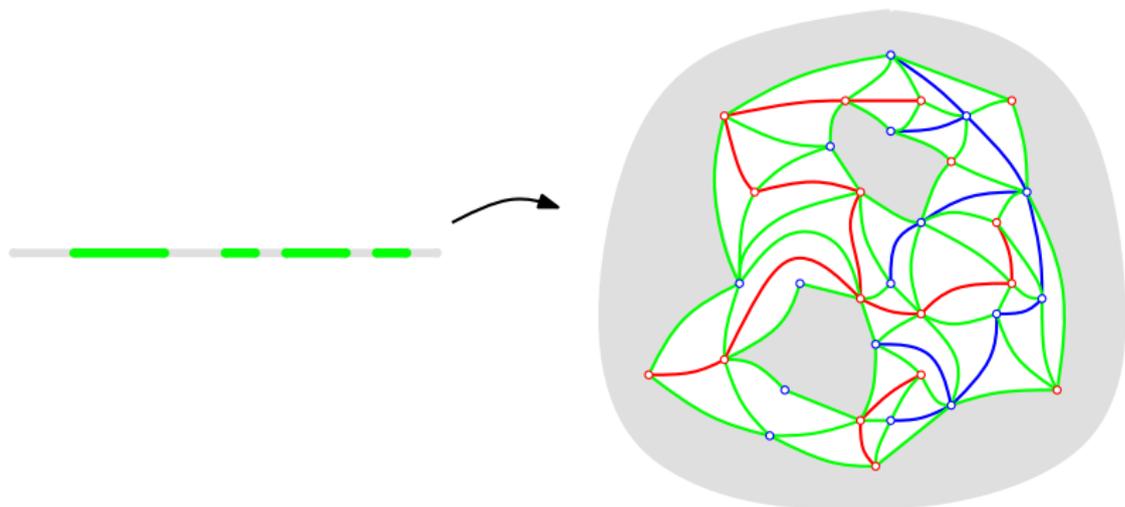
① One-endedness

\rightsquigarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{Localité de l'application mot} \mapsto \text{carte} \\ + \text{ Structure unidimensionnelle du mot} \end{array} \right.$

Propriétés de la carte cFK infinie

① One-endedness

\rightsquigarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{Localité de l'application mot} \mapsto \text{carte} \\ + \text{ Structure unidimensionnelle du mot} \end{array} \right.$



Propriétés de la carte cFK infinie

- 2 Récurrence de la marche aléatoire simple sur \mathbf{M}

Propriétés de la carte cFK infinie

② Récurrence de la marche aléatoire simple sur \mathbf{M}

Définition

Un graphe aléatoire fini enraciné (\mathbf{H}, \mathbf{r}) est *uniformément enraciné* si sa loi est invariante sous ré-enracinement uniforme.

Propriétés de la carte cFK infinie

② Récurrence de la marche aléatoire simple sur \mathbf{M}

Définition

Un graphe aléatoire fini enraciné (\mathbf{H}, \mathbf{r}) est *uniformément enraciné* si sa loi est invariante sous ré-enracinement uniforme.

Théorème (Gurel-Gurevich, Nachmias '11)

Soit $(\mathbf{H}_\infty, \mathbf{r})$ la limite locale d'une suite de graphes planaires finis uniformément enracinés. Si la loi de $\deg(\mathbf{r})$ a une queue exponentielle, alors la marche aléatoire simple sur \mathbf{H}_∞ est p.s. récurrente.

Propriétés de la carte cFK infinie

② Récurrence de la marche aléatoire simple sur \mathbf{M}

Définition

Un graphe aléatoire fini enraciné (\mathbf{H}, \mathbf{r}) est *uniformément enraciné* si sa loi est invariante sous ré-enracinement uniforme.

Théorème (Gurel-Gurevich, Nachmias '11)

Soit $(\mathbf{H}_\infty, \mathbf{r})$ la limite locale d'une suite de graphes planaires finis uniformément enracinés. Si la loi de $\deg(\mathbf{r})$ a une queue exponentielle, alors la marche aléatoire simple sur \mathbf{H}_∞ est p.s. récurrente.

Via la bijection hamburger-cheeseburger, on peut trouver un majorant explicite pour la queue de la distribution de $\deg(\mathbf{r})$ dans une carte cFK infinie. D'où la récurrence p.s. de la marche aléatoire simple sur \mathbf{M} .

mrci!