Un résultat de convergence vers la carte brownienne pour des cartes biparties

Céline Abraham
Université Paris-Sud

29 avril 2014

Définition

On considère un graphe fini connexe, on autorise les boucles et les arêtes multiples.

Définition

Une carte planaire finie m est une classe d'équivalence de tels graphes plongés dans la sphère, modulo les homéomorphismes de la sphère qui préservent l'orientation.

On considère une carte planaire m.

Définition

Soient u et v deux sommets de m. La distance de graphe $d_{\mathrm{gr}}(u,v)$ est le nombre minimal d'arêtes nécessaires pour relier u et v dans m.

On note $V(m)$ l'ensemble des sommets de m. Alors $(V(m), d_{\mathrm{gr}})$ est un espace métrique compact.

On appelle $\mathbb{M}_n^p$ l'ensemble des p-angulations enracinées à n faces (vues à homéomorphismes près). C'est un ensemble fini.

On munit les espaces métriques compacts (à isométrie près) de la distance de Gromov–Hausdorff.

On munit les espaces métriques compacts (à isométrie près) de la distance de Gromov–Hausdorff.

Théorème (Le Gall, Miermont ($p = 4$), 11')

Soit M_n une carte suivant la loi uniforme sur $\mathbb{M}_n^p$. On suppose $p = 3$ ou $p \geqslant 4$ pair. On a la convergence en loi au sens de Gromov-Hausdorff

$$\left(V(M_n), c_p n^{-\frac{1}{4}} d_{\mathrm{gr}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbf{m}_\infty, D^*)$$

avec $c_3 = 6^{\frac{1}{4}}$ et $c_p = \left(\frac{9}{p(p-2)}\right)^{\frac{1}{4}}$ pour p pair.
La limite $(\mathbf{m}_\infty, D^*)$ est un espace métrique compact aléatoire qui ne dépend pas de p (universalité) et est appelé la **carte brownienne**.

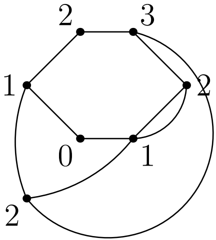
Cartes biparties

On s'est intéressé au cas plus difficile où le degré des faces n'est pas constant, en se restreignant au cas des cartes biparties.

Cartes biparties

Définition

Une carte bipartie est une carte planaire dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles tels que deux sommets adjacents n'appartiennent pas au même sous-ensemble.
C'est équivalent à dire que toutes les faces de la carte sont de degré pair.



Voici le résultat principal.

Soit $\mathcal{M}_n$ une carte bipartie de loi uniforme sur l'ensemble des cartes biparties enracinées et pointées à n arêtes.

Théorème (A. 13')

$$\left(V(\mathcal{M}_n), (2n)^{-1/4} d_{gr}^{\mathcal{M}_n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbf{m}_\infty, D^*)$$

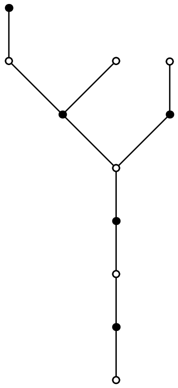
en loi pour la distance de Gromov-Hausdorff.

Arbres

Un arbre τ sera toujours plan et enraciné. On note aussi $k_u(\tau)$ le nombre d'enfants d'un sommet $u \in \tau$.

Arbres à deux types

Ici on s'intéresse en particulier à des arbres à deux types. On dit que les sommets à génération paire sont blancs et que les sommets à génération impaire sont noirs. On note τ^0 l'ensemble des sommets blancs de τ et τ^1 l'ensemble de ses sommets noirs.



Arbres à deux types étiquetés

Définition

Un arbre planaire à deux types étiqueté est une paire $\theta = (\tau, (\ell(u))_{u \in \tau^0})$ où τ est un arbre planaire enraciné à deux types et $(\ell(u))_{u \in \tau}$ est une collection d'entiers assignés aux sommets blancs de τ vérifiant la propriété suivante.

Arbres à deux types étiquetés

Définition

Un arbre planaire à deux types étiqueté est une paire $\theta = (\tau, (\ell(u))_{u \in \tau^0})$ où τ est un arbre planaire enraciné à deux types et $(\ell(u))_{u \in \tau}$ est une collection d'entiers assignés aux sommets blancs de τ vérifiant la propriété suivante.

(P) : pour chaque sommet v non étiqueté de τ, les étiquettes m et k de deux sommets étiquetés adjacents à v et consécutifs quand on tourne autour de v dans le sens horaire sont telles que $k \geqslant m - 1$.

Arbres à deux types étiquetés

Définition

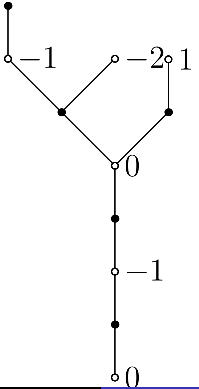
Un arbre planaire à deux types étiqueté est une paire $\theta = (\tau, (\ell(u))_{u \in \tau^0})$ où τ est un arbre planaire enraciné à deux types et $(\ell(u))_{u \in \tau}$ est une collection d'entiers assignés aux sommets blancs de τ vérifiant la propriété suivante.

(P) : pour chaque sommet v non étiqueté de τ, les étiquettes m et k de deux sommets étiquetés adjacents à v et consécutifs quand on tourne autour de v dans le sens horaire sont telles que $k \geqslant m - 1$.

L'entier $\ell(u)$ s'appelle l'étiquette de u.

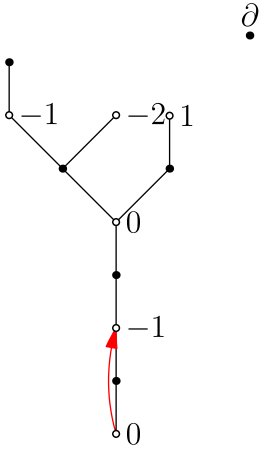
Bijection BDG

On met en bijection une carte bipartie M enracinée et pointée à n arêtes avec un arbre planaire étiqueté à deux types τ à n arêtes. On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



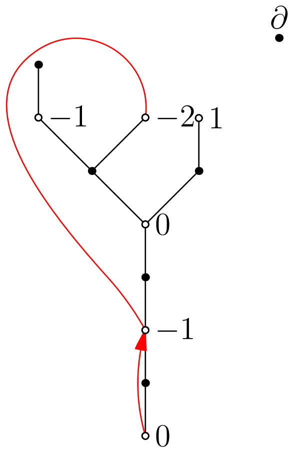
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



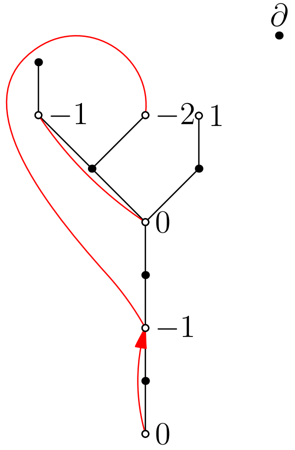
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



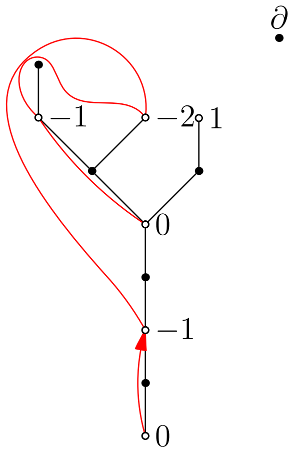
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



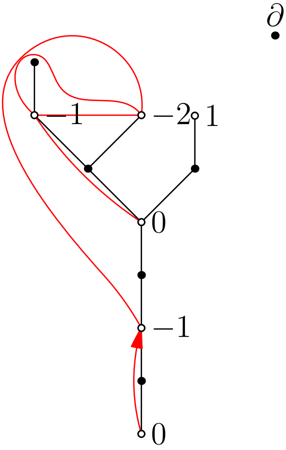
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



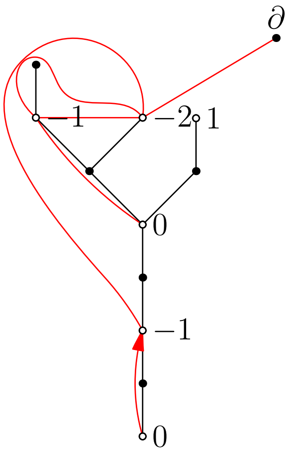
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



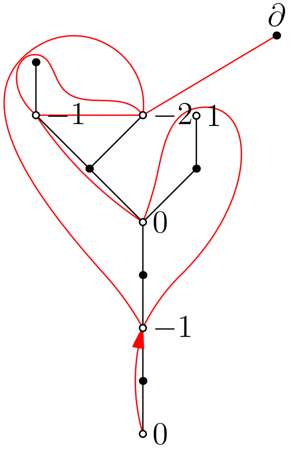
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à *n* arêtes pour arriver à une carte bipartie à *n* arêtes.



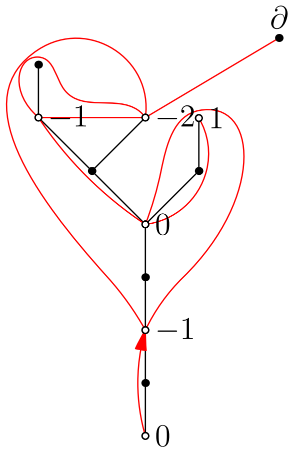
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



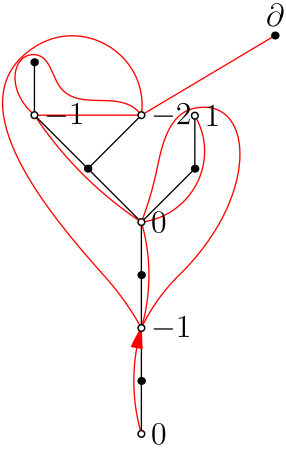
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



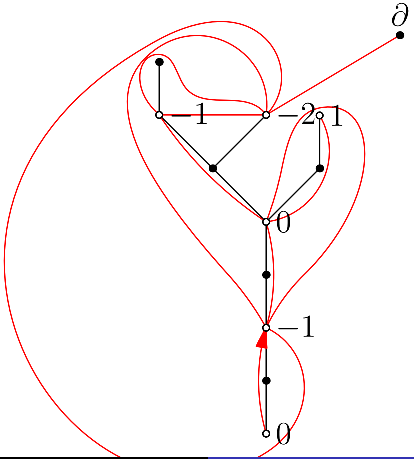
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



Loi de l'arbre à deux types associé via la bijection BDG à une carte bipartie uniforme à n arêtes :

c'est un arbre de Galton-Watson $\mathcal{T}_n$ à deux types, conditionné à avoir n arêtes

Loi de l'arbre à deux types associé via la bijection BDG à une carte bipartie uniforme à n arêtes :

c'est un arbre de Galton-Watson $\mathcal{T}_n$ à deux types, conditionné à avoir n arêtes, dont les lois de reproduction sont données pour $k \geqslant 0$ par

- $\mu_0(k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ pour les sommets blancs
- $\mu_1(k) = \frac{3}{8}\binom{2k+1}{k}\left(\frac{3}{16}\right)^k$ pour les sommets noirs.

Loi de l'arbre à deux types associé via la bijection BDG à une carte bipartie uniforme à n arêtes :

c'est un arbre de Galton-Watson $\mathcal{T}_n$ à deux types, conditionné à avoir n arêtes, dont les lois de reproduction sont données pour $k \geqslant 0$ par

- $\mu_0(k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ pour les sommets blancs
- $\mu_1(k) = \frac{3}{8}\binom{2k+1}{k}\left(\frac{3}{16}\right)^k$ pour les sommets noirs.

De plus, conditionnellement à cet arbre, les étiquettes $(\ell(u))_{u\in\mathcal{T}_n^0}$ suivent la loi uniforme sur l'ensemble des étiquetages possibles.

Loi de l'arbre à deux types associé via la bijection BDG à une carte bipartie uniforme à n arêtes :

c'est un arbre de Galton-Watson $\mathcal{T}_n$ à deux types, conditionné à avoir n arêtes, dont les lois de reproduction sont données pour $k \geqslant 0$ par

- $\mu_0(k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ pour les sommets blancs
- $\mu_1(k) = \frac{3}{8}\binom{2k+1}{k}\left(\frac{3}{16}\right)^k$ pour les sommets noirs.

De plus, conditionnellement à cet arbre, les étiquettes $(\ell(u))_{u\in\mathcal{T}_n^0}$ suivent la loi uniforme sur l'ensemble des étiquetages possibles.

Cet arbre de Galton-Watson bitype est critique, càd $m_0 m_1 = 1$ avec m_0 et m_1 les espérances des lois μ_0 et μ_1.

Fonctions de contour et d'étiquettes.

Soit $\theta = (\tau, (\ell(u))_{u \in \tau^0})$ un arbre étiqueté à deux types fini à n arêtes. On peut coder θ par une paire (C^{τ^0}, V^{τ^0}) de fonctions de $[0, n]$ dans $\mathbb{R}$ définies comme suit.

Fonctions de contour et d'étiquettes.

Soit $\theta = (\tau, (\ell(u))_{u \in \tau^0})$ un arbre étiqueté à deux types fini à n arêtes. On peut coder θ par une paire (C^{τ^0}, V^{τ^0}) de fonctions de $[0, n]$ dans $\mathbb{R}$ définies comme suit.

On note $(u_0, ..., u_{2n})$ la suite de contour de τ dans le sens horaire. Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, on pose $v_i = u_{2i}$. La suite $(v_0, \ldots, v_n)$ est la suite de contour blanche de τ.

Fonctions de contour et d'étiquettes.

Soit $\theta = (\tau, (\ell(u))_{u \in \tau^0})$ un arbre étiqueté à deux types fini à n arêtes. On peut coder θ par une paire (C^{τ^0}, V^{τ^0}) de fonctions de $[0, n]$ dans $\mathbb{R}$ définies comme suit.

On note $(u_0, ..., u_{2n})$ la suite de contour de τ dans le sens horaire. Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, on pose $v_i = u_{2i}$. La suite $(v_0, \ldots, v_n)$ est la suite de contour blanche de τ.

Pour $0 \leqslant i \leqslant n$ on définit

$$C_i^{\tau^0} = \frac{1}{2}|v_i|$$

et

$$V_i^{\tau^0} = \ell(v_i).$$

Fonctions de contour et d'étiquettes.

Soit $\theta = (\tau, (\ell(u))_{u \in \tau^0})$ un arbre étiqueté à deux types fini à n arêtes. On peut coder θ par une paire (C^{τ^0}, V^{τ^0}) de fonctions de $[0, n]$ dans $\mathbb{R}$ définies comme suit.

On note $(u_0, ..., u_{2n})$ la suite de contour de τ dans le sens horaire. Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, on pose $v_i = u_{2i}$. La suite $(v_0, \dots, v_n)$ est la suite de contour blanche de τ.

Pour $0 \leqslant i \leqslant n$ on définit

$$C_i^{\tau^0} = \frac{1}{2}|v_i|$$

et

$$V_i^{\tau^0} = \ell(v_i).$$

On étend C^{τ^0} et V^{τ^0} en deux fonctions continues sur $[0, n]$, par interpolation linéaire.

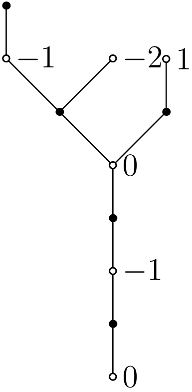


FIGURE: Arbre τ

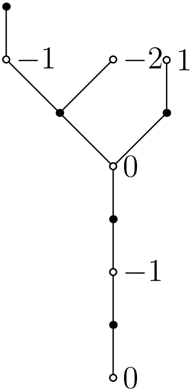


FIGURE: Arbre τ

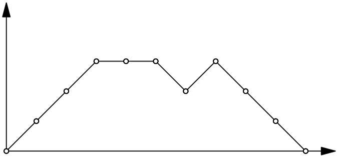


FIGURE: Fonction de contour C^{τ^0}

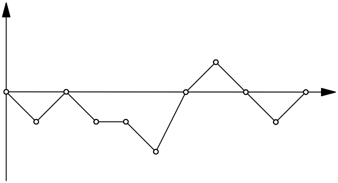


FIGURE: Fonction d'étiquette L^{τ^0}

Résultat de convergence pour les arbres à deux types

On prend un arbre de Galton-Watson à deux types $\mathcal{T}_n$ de lois de reproduction μ_0 et μ_1, conditionné à avoir n arêtes. On note $(C_{nt}^{\mathcal{T}_n^0})_{0\leq t\leq 1}$ et $(L_{nt}^{\mathcal{T}_n^0})_{0\leq t\leq 1}$ les fonctions de contour et d'étiquettes de l'arbre blanc.

Proposition clé

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}C_{nt}^{\mathcal{T}_n^0}, \frac{1}{n^{1/4}}L_{nt}^{\mathcal{T}_n^0}\right)_{0\leq t\leq 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\mathbf{e}_t, 2^{1/4}Z_t\right)_{0\leq t\leq 1}$$

Résultat de convergence pour les arbres à deux types

On prend un arbre de Galton-Watson à deux types $\mathcal{T}_n$ de lois de reproduction μ_0 et μ_1, conditionné à avoir n arêtes. On note $(C^{\mathcal{T}_n^0}_{nt})_{0\leq t\leq 1}$ et $(L^{\mathcal{T}_n^0}_{nt})_{0\leq t\leq 1}$ les fonctions de contour et d'étiquettes de l'arbre blanc.

Proposition clé

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}C^{\mathcal{T}_n^0}_{nt}, \frac{1}{n^{1/4}}L^{\mathcal{T}_n^0}_{nt}\right)_{0\leq t\leq 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\mathbf{e}_t, 2^{1/4}Z_t\right)_{0\leq t\leq 1}$$

N.B. La difficulté réside dans le fait que le nombre de sommets blancs de $\mathcal{T}_n$ est aléatoire.

Soit $\mathcal{T}$ un arbre de Galton-Watson à deux types, de lois de reproduction μ_0, μ_1.

On note N le nombre (aléatoire) d'arêtes de $\mathcal{T}$.

Soit $\mathcal{T}$ un arbre de Galton-Watson à deux types, de lois de reproduction μ_0, μ_1.

On note N le nombre (aléatoire) d'arêtes de $\mathcal{T}$. Pour $0 \leq k \leq N$, on définit la tribu $\mathcal{F}_k$ engendrée par :

- les sommets $u_0, u_1, \ldots, u_{2k}$

Soit $\mathcal{T}$ un arbre de Galton-Watson à deux types, de lois de reproduction μ_0, μ_1.

On note N le nombre (aléatoire) d'arêtes de $\mathcal{T}$. Pour $0 \leq k \leq N$, on définit la tribu $\mathcal{F}_k$ engendrée par :

- les sommets $u_0, u_1, \ldots, u_{2k}$
- les étiquettes $\ell(u_0), \ell(u_2), \ldots, \ell(u_{2k})$

Soit $\mathcal{T}$ un arbre de Galton-Watson à deux types, de lois de reproduction μ_0, μ_1.

On note N le nombre (aléatoire) d'arêtes de $\mathcal{T}$. Pour $0 \leq k \leq N$, on définit la tribu $\mathcal{F}_k$ engendrée par :

- les sommets $u_0, u_1, \ldots, u_{2k}$
- les étiquettes $\ell(u_0), \ell(u_2), \ldots, \ell(u_{2k})$
- Pour i impair, le nombre d'enfants $k_{\mathcal{T}}(u_i)$ du sommet noir u_i et les étiquettes de ces enfants.

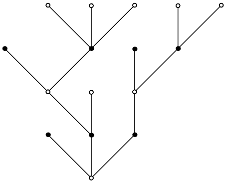
Soit $\mathcal{T}$ un arbre de Galton-Watson à deux types, de lois de reproduction μ_0, μ_1.

On note N le nombre (aléatoire) d'arêtes de $\mathcal{T}$. Pour $0 \leq k \leq N$, on définit la tribu $\mathcal{F}_k$ engendrée par :

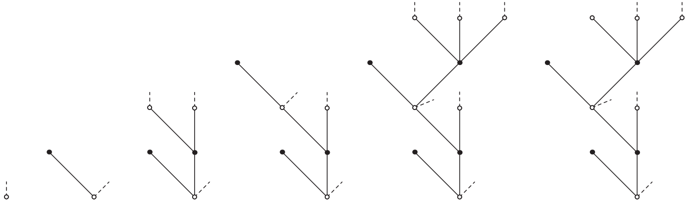
- les sommets $u_0, u_1, \ldots, u_{2k}$
- les étiquettes $\ell(u_0), \ell(u_2), \ldots, \ell(u_{2k})$
- Pour i impair, le nombre d'enfants $k_{\mathcal{T}}(u_i)$ du sommet noir u_i et les étiquettes de ces enfants.

On introduit la suite $(Y_0, \ldots, Y_{N+1})$ définie par récurrence par $Y_0 = 1$ et pour $0 \leq k \leq N$,

- si u_{2k} a un enfant qui n'apparaît pas parmi $u_0, u_1, \ldots, u_{2k-1}$, alors $Y_{k+1} = Y_k + k_{\mathcal{T}}(u_{2k+1})$,
- sinon $Y_{k+1} = Y_k - 1$.



Information donnée par les tribus $\mathcal{F}_k$ pour $k = 0, \ldots, 5$:



$\mathcal{F}_0$ $\mathcal{F}_1$ $\mathcal{F}_2$ $\mathcal{F}_3$ $\mathcal{F}_4$ $\mathcal{F}_5$

On a des lignes en pointillés au dessus des sommets blancs "actifs". La valeur de Y_k est donnée par le nombre de sommets blancs actifs.