

# Quelques propriétés statistiques du périmètre du hull dans les triangulations et les quadrangulations

Emmanuel Gitter (IPhT, CEA Saclay)

Journée Cartes du 14 avril 2016

# Quelques propriétés statistiques du périmètre du hull dans les triangulations et les quadrangulations

Emmanuel Guitter (IPhT, CEA Saclay)

Journée Cartes du 14 avril 2016

[arXiv:1511.01773](#)

The distance-dependent two-point function of triangulations: a new derivation from old results

[arXiv:1512.00179](#)

The distance-dependent two-point function of quadrangulations: a new derivation by direct recursion

[arXiv:1602.07433](#)

Some results on the statistics of hull perimeters in large planar triangulations and quadrangulations

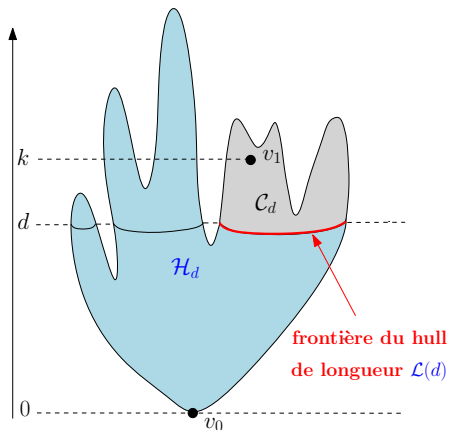
# Le hull et son périmètre: présentation heuristique

Soit  $\mathcal{M}$  une carte plane  
bi-pointée dont les sommets  
marqués  $v_0$  et  $v_1$  sont à  
distance

$$d(v_0, v_1) = k$$

Pour  $d < k$ :

$\mathcal{C}_d$  = composante connexe à  
distance  $> d$  de  $v_0$  contenant  
 $v_1$



Hull  $\mathcal{H}_d = \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}_d$

Périmètre du hull  $\mathcal{L}(d)$  = longueur de la frontière de  $\mathcal{H}_d$

= longueur de la frontière de  $\mathcal{C}_d$

- Quelle est la loi de probabilité de  $\mathcal{L}(d)$  en fonction de  $d$  et  $k$  ?
- Quelles lois universelles en découlent quand  $k$  et  $d$  deviennent grands ?



Ici on va considérer uniquement le cas de **triangulations** et de **quadrangulations** et s'appuyer sur de nouveaux résultats concernant la

## **génération récursive de slices**

(= tranches de cartes) intimement liée au concept de hull

Exposé en deux parties:

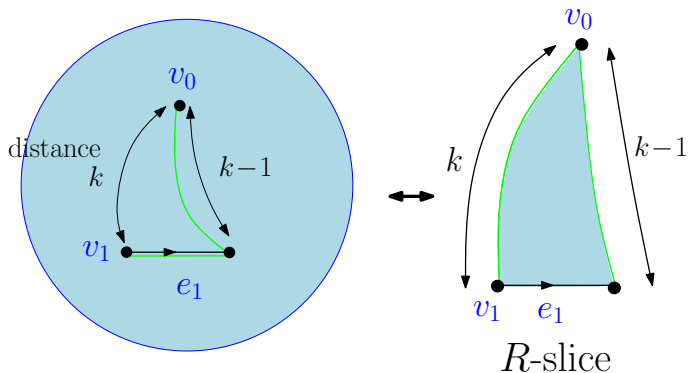
1. **Une nouvelle récurrence pour les slices**
2. **Application à la statistique du périmètre du hull**

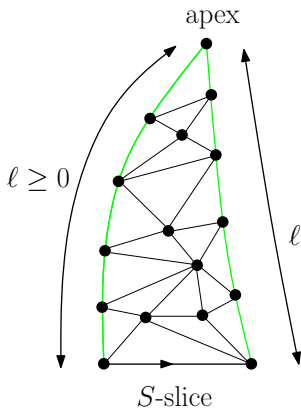
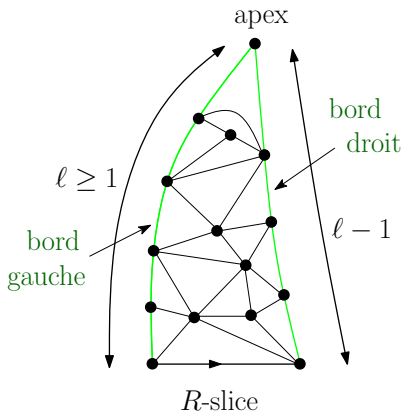
# 1. Une nouvelle récurrence pour les slices: l'exemple des triangulations

On part d'une triangulation **pointée-enracinée** (plutôt que bipointée)

- sommet marqué  $v_0$
- sommet marqué  $v_1$  à distance  $k$  de  $v_0$  avec une arête marquée  $e_1$  d'origine  $v_1$  pointant vers un voisin de  $v_1$  à distance  $k-1$  de  $v_0$

Une telle carte peut être représentée sous forme de  **$R$ -slice**:





- bord gauche = plus court chemin vers l'apex (de longueur notée  $l$ )
- bord droit = **unique** plus court chemin vers l'apex (de longueur  $l - 1$ )

On introduit aussi les *S-slices* dont les deux bords ont la même longueur  
 → ne sont pas la représentation de cartes pointées-enracinées

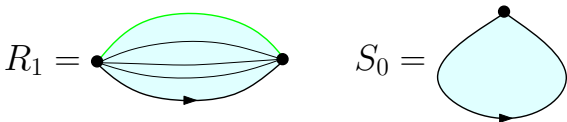
## Fonctions génératrices (poids $G$ par triangle)

$R_k = R_k(G)$ :  $R$ -slices dont le bord gauche a une longueur  $\ell$  entre 1 et  $k$

$S_k = S_k(G)$ :  $S$ -slices dont le bord gauche a une longueur  $\ell$  entre 0 et  $k$

→ en particulier  $R_0 = 0$

cas particuliers:

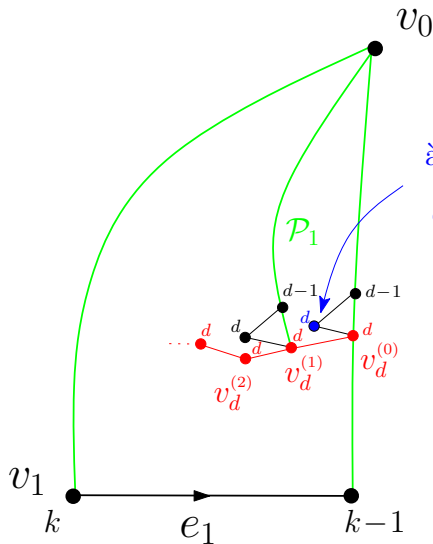


$T_k = T_k(G)$ :  $S$ -slices dont le bord gauche a une longueur  $\ell$  entre 1 et  $k$

$$T_k = S_k - S_0$$

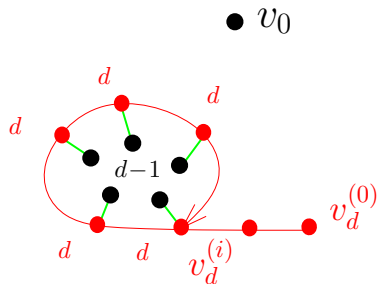
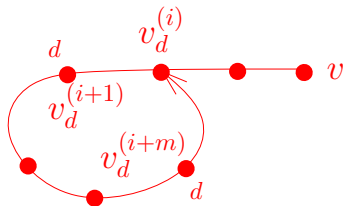
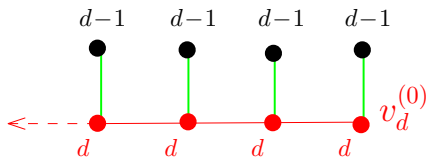
→ en particulier  $T_0 = 0$

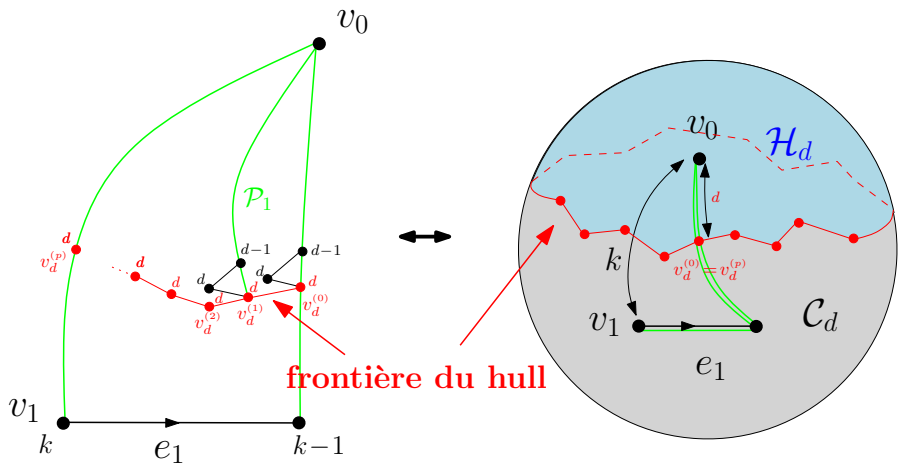
# Construction de la frontière du hull $\mathcal{H}_d$ sur la $R$ -slice



à distance  $d$  de  $v_0$   
et nécessairement  
distinct de  $v_d^{(0)}$

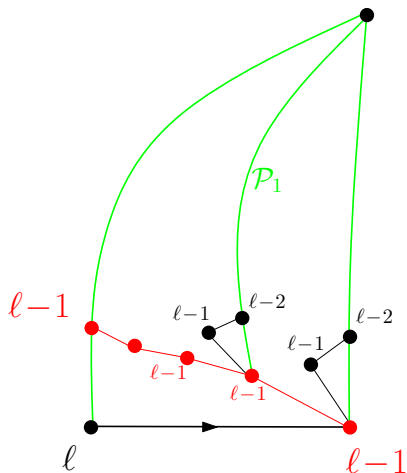






## Récurrance sur les slices

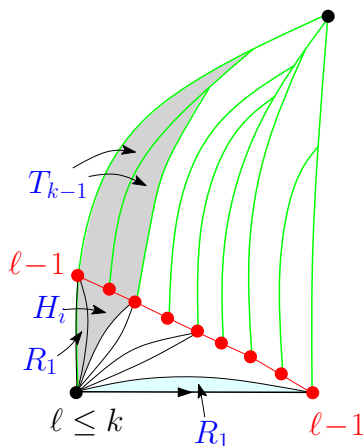
On applique la même construction  
dans le cas  $k = \ell$  et  $d = \ell - 1$



## Récurrance sur les slices

Une  $R$ -slice énumérée par  $R_k$  est divisée en:

- une partie supérieure elle-même découpée en  $S$ -slices énumérées par  $T_{k-1}$
- après marquage des arêtes reliant l'origine de la  $R$ -slice à la frontière, une partie inférieure formée d'une alternance de faisceaux énumérés par  $R_1$  et de cartes à bord simple de longueur arbitraire  $i \geq 3$  énumérées par  $H_i \equiv H_i(G)$



NB: chaque  $H_i$  a  $i - 2$  côtés le long de la frontière  $\rightarrow (T_{k-1})^{i-2}$

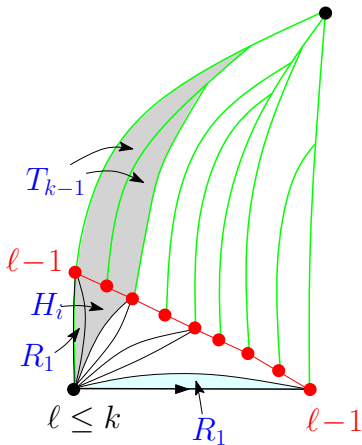
En définissant

$$\Phi(T) \equiv \sum_{i \geq 3} H_i T^{i-3}$$

séquence de blocs énumérés  
par  $R_1 T_{k-1} \Phi(T_{k-1})$  et

on a la relation

$$R_k = \frac{R_1}{1 - R_1 T_{k-1} \Phi(T_{k-1})}$$



En définissant

$$\Phi(T) \equiv \sum_{i \geq 3} H_i T^{i-3}$$

séquence de blocs énumérés  
par  $R_1 T_{k-1} \Phi(T_{k-1})$  et

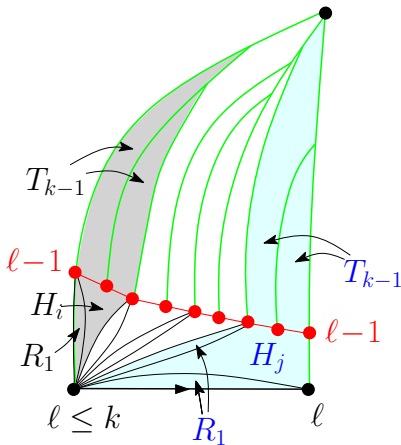
on a la relation

$$R_k = \frac{R_1}{1 - R_1 T_{k-1} \Phi(T_{k-1})}$$

Par un raisonnement analogue

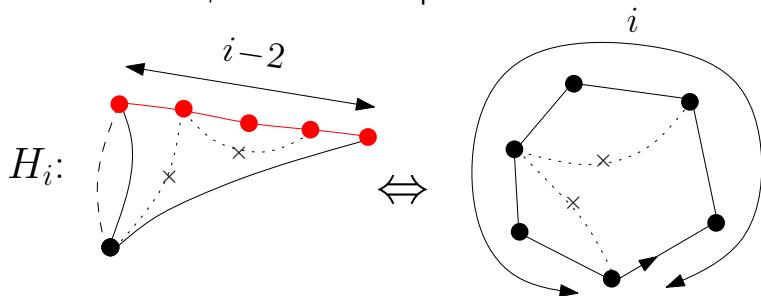
on a la récurrence

$$T_k = \frac{R_1^2 \Phi(T_{k-1})}{1 - R_1 T_{k-1} \Phi(T_{k-1})}$$



Que compte  $H_i$  ?

Par construction, cartes bord simple

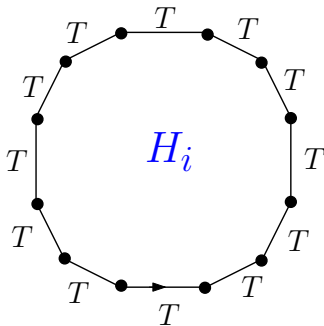


Pas d'arêtes internes bord-bord

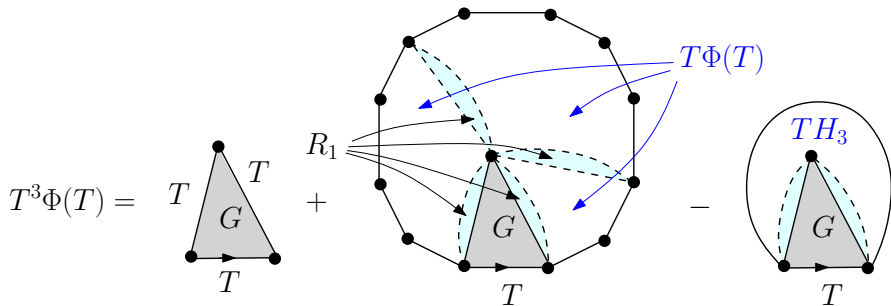
Déjà considéré par Tutte dans "A census of planar triangulations"

$$T^3\Phi(T) =$$

$$\sum_{i \geq 3}$$







$$T^3\Phi(T) = GT^3 + GT \left( \frac{R_1^2 T \Phi(T)}{1 - R_1 T \Phi(T)} - R_1^2 TH_3 \right)$$

$$\Phi(T) = G + \frac{G}{T} \left( \frac{R_1^2 \Phi(T)}{1 - R_1 T \Phi(T)} - R_1^2 H_3 \right)$$

On peut simplifier l'équation et se débarrasser de  $R_1$  en posant

$$r_k \equiv \frac{R_k}{R_1}, \quad t_k \equiv \frac{T_k}{R_1^{1/2}}, \quad h_i \equiv R_1^{i/2} H_i, \quad \phi(t) \equiv R_1^{3/2} \Phi(t R_1^{1/2}), \quad g \equiv G R_1^{3/2}$$

de sorte que

$$r_k = \frac{1}{1 - t_{k-1} \phi(t_{k-1})}, \quad t_k = \frac{\phi(t_{k-1})}{1 - t_{k-1} \phi(t_{k-1})}$$

avec

$$\phi(t) = \sum_{i \geq 3} h_i t^{i-3}$$

solution de

$$\phi(t) = g + \frac{g}{t} \left( \frac{\phi(t)}{1 - t \phi(t)} - h_3 \right)$$

→ revient à considérer des slices **sans arêtes multiples** avec poids  $g$  par triangle

Solution: détermination de  $h_3(g) \rightarrow$  on écrit  $\frac{d}{dt}h_3 = 0$

$$\rightarrow (-\phi(t)^2 t^3 + 2\phi(t)t^2 - t + g) + \phi'(t)(-t^2\phi(t)^3 + (gt^2 + 2t + g)\phi(t)^2 - (2gt + 1)\phi(t) + g) = 0$$

On se place sur une ligne  $t = t(g)$  qui annule le deuxième coefficient  $\rightarrow$  doit aussi annuler le premier, d'où on déduit:

$$g = \frac{t(g)}{(t(g)^2 + 1)^2}, \quad \phi(t(g)) = \frac{t(g)}{t(g)^2 + 1}$$

et en réinjectant dans l'équation pour  $\phi(t)$  à  $t = t(g)$ :

$$h_3 = t(g) - t(g)^3$$

Cela nous amène naturellement à utiliser la paramétrisation suivante de  $g$

$$g = \frac{C}{(C^2 + 1)^2} \text{ qui permet d'écrire } h_3(g) \text{ comme } h_3 = C - C^3$$

et l'équation quadratique qui fixe  $\phi(t)$  comme:

$$C(C^3 - C + t) + (-2tC^4 - tC^2 - t^2C + C - t)\phi(t) + (C^2 + 1)^2 t^2 \phi(t)^2 = 0$$

Le discriminant de l'équation étant

$$\Delta = (C - t)^2 ((Ct - 1)^2 - 4C^3t)$$

on est fortement incité (voir Tutte) à introduire la quantité  $Y(t)$  solution de

$$C^3t - (Ct - 1)Y(t) + Y(t)^2 = 0$$

$\phi(t)$  s'exprime alors en fonction de  $Y(t)$  comme

$$\phi(t) = \frac{C(Y(t) + 1 - C^2)}{(Y(t) + 1)^2} \quad \text{avec} \quad t = \frac{Y(t)(Y(t) + 1)}{C(Y(t) - C^2)}$$

NB: on peut voir  $Y(t)$  comme une paramétrisation de  $t$

En définissant

$$Y_k \equiv Y(t_k)$$

la récurrence sur  $t_k$  devient une récurrence sur  $Y_k$

$$Y_k = \frac{C^2 Y_{k-1} - C^4}{Y_{k-1} + 1}$$

avec  $Y_0 = 0$  (car  $t_0 = 0$ ) et là, on sait bien résoudre car il s'agit d'une simple **récurrence homographique** !

$$Y_k = -\frac{x^2}{1+x+x^2} \times \frac{1-x^k}{1-x^{k+2}}, \quad C^2 = \frac{x}{1+x+x^2}$$

d'où l'on déduit  $t_k$ ,  $\phi(t_k)$ ,  $r_k$  puis finalement  $R_k$  (le facteur de proportionnalité  $R_1$  entre  $r_k$  et  $R_k$  s'obtient facilement en regardant par exemple la limite  $k \rightarrow \infty$ )

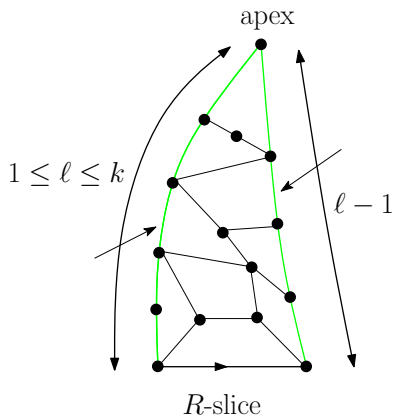
## Formule finale

$$T_k = T \frac{(1-x^k)(1-x^{k+3})}{(1-x^{k+1})(1-x^{k+2})}, \quad T = \sqrt{x} \frac{(1+10x+x^2)^{1/4}}{(1+x)^{3/2}}$$
$$R_k = R \frac{(1-x^k)(1-x^{k+2})}{(1-x^{k+1})^2}, \quad R = \frac{\sqrt{1+10x+x^2}}{1+x}$$

avec (en passant de  $x$  à  $C$  à  $g$  à  $G$ )

$$G = \frac{\sqrt{x(1+x)}}{(1+10x+x^2)^{3/4}}$$

# Le cas des quadrangulations

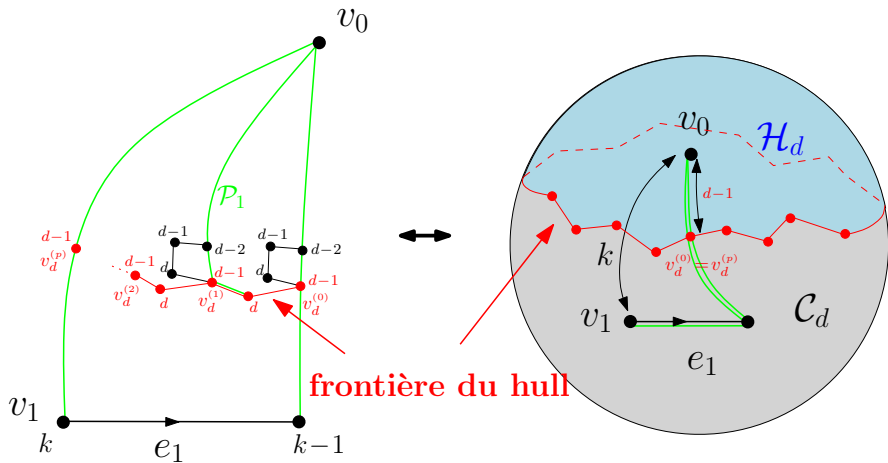


## Fonctions génératrices (poids $G$ par face)

$R_k = R_k(G)$ :  $R$ -slices dont le bord gauche a une longueur  $\ell$  entre 1 et  $k$

$T_k = T_k(G)$ :  $R$ -slices dont le bord gauche a une longueur  $\ell$  entre 2 et  $k$

$$T_k = R_k - R_1$$

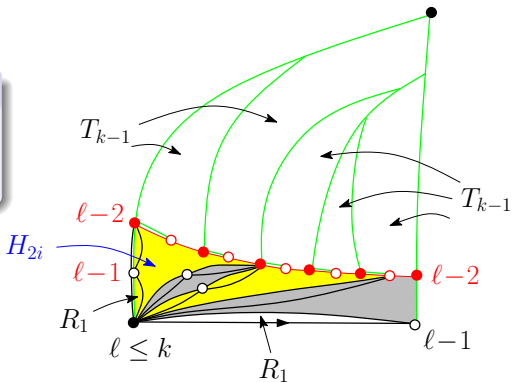




En définissant

$$\Phi(T) \equiv \sum_{i \geq 2} H_{2i} T^{i-2}$$

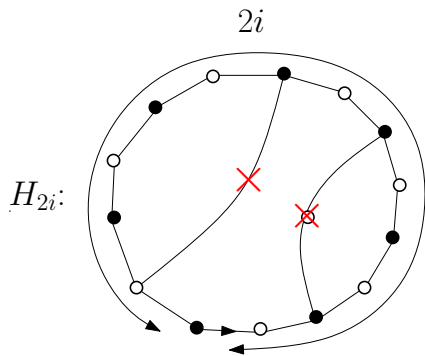
où  $H_{2i}$  énumère certaines quadrangulations à bord de longueur  $2i$ , alors



on a la récurrence

$$T_k = \frac{R_1^2 (R_1 + T_{k-1}) \Phi(T_{k-1})}{1 - R_1 (R_1 + T_{k-1}) T_{k-1} \Phi(T_{k-1})}$$

NB: le nombre de  $T_{k-1}$  est la moitié du périmètre du hull



et on montre que  $\Phi(T)$  est solution de

$$\Phi(T) = G + \frac{G}{T} \left( \frac{R_1^2(R_1 + T)\Phi(T)}{1 - R_1(R_1 + T)\Phi(T)} - \frac{R_1^3 H_4}{1 - R_1^2 H_4} \right)$$

on arrive par le même cheminement à la formule finale

$$T_k = T \frac{(1 - x^{k-1})(1 - x^{k+4})}{(1 - x^{k+1})(1 - x^{k+2})}, \quad T = \frac{x(1 + 4x + x^2)}{(1 + x + x^2)^2}$$
$$R_k = R \frac{(1 - x^k)(1 - x^{k+3})}{(1 - x^{k+1})(1 - x^{k+2})}, \quad R = \frac{1 + 4x + x^2}{1 + x + x^2}$$

avec

$$G = \frac{x(1 + x + x^2)}{(1 + 4x + x^2)^2}$$

## 2. Application à la statistique du périmètre du hull

Revenons aux triangulations

$$R_k = \mathcal{N}(T_{k-1}) , \quad T_k = \mathcal{K}(T_{k-1})$$

$$\mathcal{N}(T) = \frac{R_1}{1 - R_1 T \Phi(T)} , \quad \mathcal{K}(T) = \frac{(R_1)^2 \Phi(T)}{1 - R_1 T \Phi(T)}$$

## 2. Application à la statistique du périmètre du hull

Revenons aux triangulations

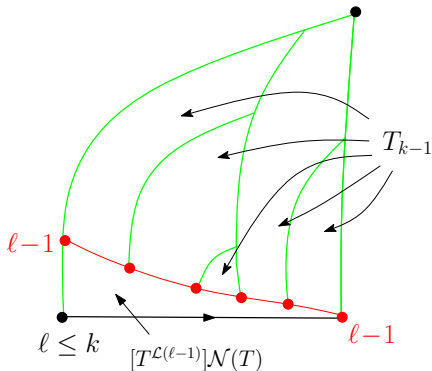
$$R_k = \mathcal{N}(T_{k-1}), \quad T_k = \mathcal{K}(T_{k-1})$$

$$\mathcal{N}(T) = \frac{R_1}{1 - R_1 T \Phi(T)}, \quad \mathcal{K}(T) = \frac{(R_1)^2 \Phi(T)}{1 - R_1 T \Phi(T)}$$

$\mathcal{N}(T_{k-1})$  énumère les  $R$ -slices  
avec  $\ell$  entre 1 et  $k$ :

fait la somme sur toutes les  
valeurs du périmètre  $\mathcal{L}(\ell - 1)$

$$\sum_{\mathcal{L}(\ell-1)} \underbrace{[T^{\mathcal{L}(\ell-1)}] \mathcal{N}(T) \times (T_{k-1})^{\mathcal{L}(\ell-1)}}_{\text{contribution des slices de périmètre } \mathcal{L}(\ell-1) \text{ fixé}}$$



## 2. Application à la statistique du périmètre du hull

Revenons aux triangulations

$$R_k = \mathcal{N}(T_{k-1}), \quad T_k = \mathcal{K}(T_{k-1})$$

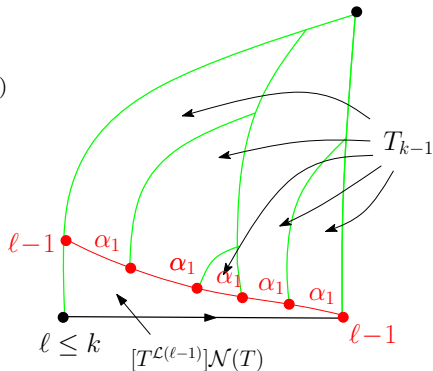
$$\mathcal{N}(T) = \frac{R_1}{1 - R_1 T \Phi(T)}, \quad \mathcal{K}(T) = \frac{(R_1)^2 \Phi(T)}{1 - R_1 T \Phi(T)}$$

$$\mathcal{N}(\alpha_1 T_{k-1}) =$$

$$\sum_{\mathcal{L}^{(\ell-1)}} [T^{\mathcal{L}^{(\ell-1)}}] \mathcal{N}(T) \times (\alpha_1 T_{k-1})^{\mathcal{L}^{(\ell-1)}}$$

énumère les  $R$ -slices avec  $\ell$   
entre 1 et  $k$  et avec un poids

$$\alpha_1^{\mathcal{L}^{(\ell-1)}}$$



## 2. Application à la statistique du périmètre du hull

Revenons aux triangulations

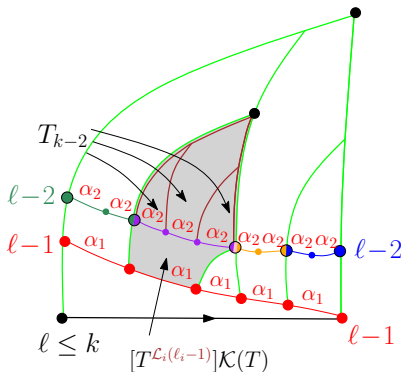
$$R_k = \mathcal{N}(T_{k-1}), \quad T_k = \mathcal{K}(T_{k-1})$$

$$\mathcal{N}(T) = \frac{R_1}{1 - R_1 T \Phi(T)}, \quad \mathcal{K}(T) = \frac{(R_1)^2 \Phi(T)}{1 - R_1 T \Phi(T)}$$

en décomposant chacune des  $\mathcal{L}(\ell - 1)$  sous-slices (comptées par  $T_{k-1}$ ) en sous-sous slices (comptées par  $T_{k-2}$ )

$$\mathcal{L}(\ell - 2) = \sum_{i=1}^{\mathcal{L}(\ell-1)} \mathcal{L}_i(\ell_i - 1)$$

où  $\mathcal{L}_i$  mesure le périmètre du hull dans la sous-slice n°  $i$  (de bord gauche de longueur  $\ell_i$ )



## 2. Application à la statistique du périmètre du hull

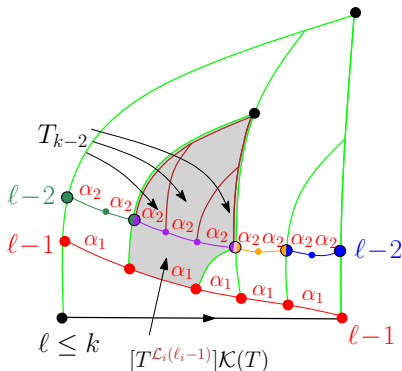
Revenons aux triangulations

$$R_k = \mathcal{N}(T_{k-1}) , \quad T_k = \mathcal{K}(T_{k-1})$$

$$\mathcal{N}(T) = \frac{R_1}{1 - R_1 T \Phi(T)} , \quad \mathcal{K}(T) = \frac{(R_1)^2 \Phi(T)}{1 - R_1 T \Phi(T)}$$

$\mathcal{N}(\alpha_1 \mathcal{K}(\alpha_2 T_{k-2}))$  énumère les  $R$ -slices avec  $\ell$  entre 1 et  $k$  et avec un poids

$$\alpha_1^{\mathcal{L}(\ell-1)} \alpha_2^{\mathcal{L}(\ell-2)}$$





Si on s'intéresse uniquement au périmètre du hull à distance  $\ell - m$ , alors, pour  $1 \leq m \leq k - 1$

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots (\mathcal{K}(\alpha T_{k-m})))}_{m-1 \text{ fois}})$$

énumère les  $R$ -slices avec  $\ell$  entre 1 et  $k$  et avec un poids

$$\alpha^{\mathcal{L}(\ell-m)}$$

NB:  $\mathcal{L}(\ell - m) = 0$  si  $\ell \leq m$

Si on veut compter les triangulations pointées-enracinées avec  $d(v_0, v_1) = k$  et un poids  $\alpha^{\mathcal{L}(d)}$ , il faut fixer  $\ell = k$  et  $m = k - d$

La fonction génératrice recherchée est

$$Z(\alpha; d, k) \equiv \mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots (\mathcal{K}(\alpha T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}}) - \mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots (\mathcal{K}(\alpha T_{d-1})))}_{k-d-1 \text{ fois}})$$

Comment calculer  $\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(\alpha T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}})$  ?

On sait que

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}}) = R_k$$

soit

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}\left(T \frac{(1-x^d)(1-x^{d+3})}{(1-x^{d+1})(1-x^{d+2})}\right))}_{k-d-1 \text{ fois}})) = R \frac{(1-x^k)(1-x^{k+2})}{(1-x^{k+1})^2}$$

Comment calculer  $\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(\alpha T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}})$  ?

On sait que

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}}) = R_k$$

soit

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}\left(T \frac{(1-x^d)(1-x^3x^d)}{(1-xx^d)(1-x^2x^d)}\right))}_{k-d-1 \text{ fois}})) = R \frac{(1-x^{k-d}x^d)(1-x^{k-d+2}x^d)}{(1-x^{k-d+1}x^d)^2}$$

Comment calculer  $\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(\alpha T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}})$  ?

On sait que

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}}) = R_k$$

et donc

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}\left(T \frac{(1-\lambda x^d)(1-x^3 \lambda x^d)}{(1-x \lambda x^d)(1-x^2 \lambda x^d)}\right))}_{k-d-1 \text{ fois}})) = R \frac{(1-x^{k-d} \lambda x^d)(1-x^{k-d+2} \lambda x^d)}{(1-x^{k-d+1} \lambda x^d)^2}$$

Comment calculer  $\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(\alpha T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}})$  ?

On sait que

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}}) = R_k$$

et donc

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}\left(T \frac{(1-\lambda x^d)(1-\lambda x^{d+3})}{(1-\lambda x^{d+1})(1-\lambda x^{d+2})}\right))}_{k-d-1 \text{ fois}})) = R \frac{(1-\lambda x^k)(1-\lambda x^{k+2})}{(1-\lambda x^{k+1})^2}$$

Comment calculer  $\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(\alpha T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}})$  ?

On sait que

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}}) = R_k$$

et donc

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}\left(T \frac{(1-\lambda x^d)(1-\lambda x^{d+3})}{(1-\lambda x^{d+1})(1-\lambda x^{d+2})}\right))}_{k-d-1 \text{ fois}})) = R \frac{(1-\lambda x^k)(1-\lambda x^{k+2})}{(1-\lambda x^{k+1})^2}$$

Il suffit de choisir  $\lambda$  tel que

$$\alpha \frac{(1-x^d)(1-x^{d+3})}{(1-x^{d+1})(1-x^{d+2})} = \frac{(1-\lambda x^d)(1-\lambda x^{d+3})}{(1-\lambda x^{d+1})(1-\lambda x^{d+2})}$$

Comment calculer  $\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(\alpha T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}})$  ?

On sait que

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}}) = R_k$$

et donc

$$\mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(\alpha T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}}) = R \frac{(1 - \lambda x^k)(1 - \lambda x^{k+2})}{(1 - \lambda x^{k+1})^2}$$

Il suffit de choisir  $\lambda$  tel que

$$\alpha \frac{(1 - x^d)(1 - x^{d+3})}{(1 - x^{d+1})(1 - x^{d+2})} = \frac{(1 - \lambda x^d)(1 - \lambda x^{d+3})}{(1 - \lambda x^{d+1})(1 - \lambda x^{d+2})}$$

La fonction génératrice recherchée est

$$\begin{aligned} Z(\alpha; d, k) &\equiv \mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(\alpha T_d)))}_{k-d-1 \text{ fois}}) - \mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{K}(\cdots(\mathcal{K}(\alpha T_{d-1})))}_{k-d-1 \text{ fois}}) \\ &= \frac{(1-x)^2 \sqrt{1+10x+x^2}}{(1+x)} \times \\ &\quad \times \frac{x^{k-1} (\lambda(\alpha; d-1) - \lambda(\alpha; d) x) (1 - \lambda(\alpha; d-1) \lambda(\alpha; d) x^{2k+1})}{(1 - \lambda(\alpha; d-1) x^k)^2 (1 - \lambda(\alpha; d) x^{k+1})^2} \end{aligned}$$

où  $\lambda(\alpha; d)$  est défini par

$$\frac{(1 - \lambda(\alpha; d) x^d)(1 - \lambda(\alpha; d) x^{d+3})}{(1 - \lambda(\alpha; d) x^{d+1})(1 - \lambda(\alpha; d) x^{d+2})} = \alpha \frac{(1 - x^d)(1 - x^{d+3})}{(1 - x^{d+1})(1 - x^{d+2})}$$

On a une formule analogue pour les quadrangulations



# Statistique du périmètre du hull pour les grandes cartes

On travaille dans l'ensemble des triangulations pointées enracinées à  $N$  (= nombre de faces),  $k$  et  $d$  **fixés**

→ on doit donc extraire le coefficient

$$[G^N]Z(\alpha; d, k)$$

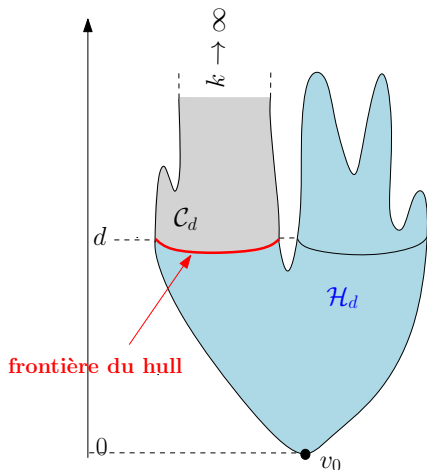
**Ensemble 1:** On s'intéresse à la limite  $N \rightarrow \infty$   
avec  $k$  et  $d$  finis (éventuellement grands) → **limite locale** des grandes triangulations

On note  $P_k(\{\cdot\})$  la probabilité d'un évènement  $\{\cdot\}$   
et  $E_k(\{\cdot\})$  la moyenne (espérance) d'une quantité  $\{\cdot\}$   
dans cet ensemble

**Ensemble 2:** On s'intéresse aussi à la limite  $N \rightarrow \infty$  puis  $k \rightarrow \infty$  ( $k$  ne "scale" pas avec  $N$ ) avec  $d$  fini (éventuellement grand)

$\rightarrow \mathcal{L}(d)$  est le périmètre de la frontière à distance  $d$  de  $v_0$  séparant  $v_0$  de l'infini

On note  $P_\infty(\{\cdot\})$  et  $E_\infty(\{\cdot\})$  les probabilités et moyennes dans cet ensemble



La limite  $N \rightarrow \infty$  s'obtient par analyse des singularités des fonctions génératrices quand  $G \rightarrow \frac{1}{2 \cdot 3^{3/4}}$  (correspond à  $x \rightarrow 1$ )

$$G = \frac{1}{2 \cdot 3^{3/4}} (1 - \epsilon^4)$$

$$Z(\alpha; d, k) = A_0(\alpha; d, k) + A_2(\alpha; d, k)\epsilon^4 + A_3(\alpha; d, k)\epsilon^6 + O(\epsilon^8)$$

$$Z(\alpha; d, k)|_{\text{sing.}} = A_3(\alpha; d, k) (1 - 2 \cdot 3^{3/4} G)^{3/2}$$

$$[G^N]Z(\alpha; d, k) \sim \frac{3}{4} \frac{(2 \cdot 3^{3/4})^N}{N^{5/2}} \times A_3(\alpha; d, k)$$

Après normalisation

$$E_k(\alpha^{\mathcal{L}(d)}) = \frac{A_3(\alpha; d, k)}{A_3(1; d, k)}$$

## Résultats pour l'ensemble 2. (i.e. $k \rightarrow \infty$ )

$$E_{\infty}(\alpha^{\mathcal{L}(d)}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{(d-1)(d+2)((d-1)(d+2)(9-\alpha)(1-\alpha)-20\alpha+36)+36}}{(d-1)(d+2)(1-\alpha)+2} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{d(d+3)(d(d+3)(9-\alpha)(1-\alpha)-20\alpha+36)+36}}{d(d+3)(1-\alpha)+2} \right)$$

et en particulier

$$E_{\infty}(\mathcal{L}(d)) = \frac{3d(d+1)^2(d+2)}{(2d+1)(2d+3)} \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{4}d^2$$

Variable rescalée

$$L(d) \equiv \frac{\mathcal{L}(d)}{d^2} \qquad E_{\infty}(L(d)) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3c}{2}$$

avec

$$c = \frac{1}{2} \quad (\text{triangulations})$$

Plus généralement (en posant  $\alpha = e^{-\tau/d^2}$ )

$$\lim_{d \rightarrow \infty} E_{\infty}(e^{-\tau L(d)}) = \frac{1}{(1 + c\tau)^{3/2}}$$

i.e. (par simple transformée de Laplace inverse):

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P_{\infty}(L \leq L(d) < L + dL) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{L}}{c^{3/2}} e^{-\frac{L}{c}} dL$$

→ mêmes formules pour les quadrangulations avec  $c = \frac{1}{3}$

On retrouve ici un résultat connu [Krikun \(2005\)](#), [Curien et Le Gall \(2014\)](#)

(à noter que la définition de la frontière du hull dans ces références n'est pas tout à fait la même et la valeur de  $c$  peut donc différer pour un même ensemble de cartes)

Loi jointe pour les périmètres à distances  $d_1 = d$  et  $d_2 = v d$

Pour  $v > 1$

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} E_{\infty}(e^{-\tau_1 L(d) - \tau_2 L(vd)}) \\ = \frac{v^3}{(v^2(1+c\tau_1)(1+c\tau_2) - 2vc\tau_2(1+c\tau_1 - \sqrt{1+c\tau_1}) + c\tau_2(2+c\tau_1 - 2\sqrt{1+c\tau_1}))^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(L_1, L_2; v) dL_1 dL_2 \equiv \lim_{d \rightarrow \infty} P_{\infty}(L_1 \leq L(d) < L_1 + dL_1 \text{ and } L_2 \leq L(vd) < L_2 + dL_2)$$

Par simple transformée de Laplace inverse (et pour  $v > 1$ )

$$\mathcal{P}(L_1, L_2; v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{L_1}}{c^{3/2}} e^{-\frac{L_1}{c}} \times \frac{\sqrt{2}}{c} v^2 e^{-\frac{L_2 v^2}{c(v-1)^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{L_1}{c(v-1)^2}\right)^{\frac{n}{2}} \pi_n \left(\sqrt{\frac{2L_2 v^2}{c(v-1)^2}}\right)}{(n+1)! \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

où  $\pi_n(t)$  est le polynôme défini par

$$\pi_n(t) \equiv -e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left( t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \right)$$

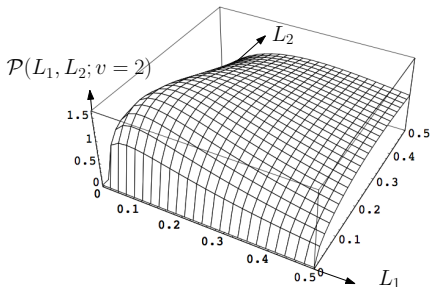
Loi jointe pour les périmètres à distances  $d_1 = d$  et  $d_2 = v d$

Pour  $v > 1$

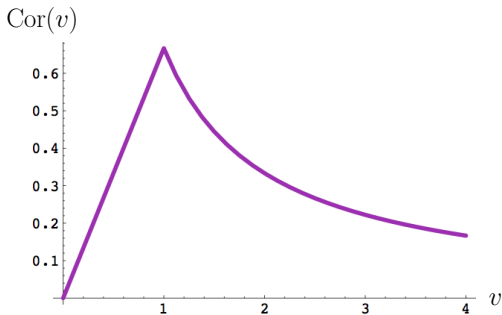
$$\lim_{d \rightarrow \infty} E_{\infty}(e^{-\tau_1 L(d) - \tau_2 L(vd)})$$

$$= \frac{v^3}{(v^2(1+c\tau_1)(1+c\tau_2) - 2vc\tau_2(1+c\tau_1 - \sqrt{1+c\tau_1}) + c\tau_2(2+c\tau_1 - 2\sqrt{1+c\tau_1}))^{3/2}}$$

$$\mathcal{P}(L_1, L_2; v) dL_1 dL_2 \equiv \lim_{d \rightarrow \infty} P_{\infty}(L_1 \leq L(d) < L_1 + dL_1 \text{ and } L_2 \leq L(vd) < L_2 + dL_2)$$



$$\begin{aligned} \text{Cor}(v) &\equiv \frac{\lim_{d \rightarrow \infty} E_{\infty}(L(d) L(v d))}{\lim_{d \rightarrow \infty} E_{\infty}(L(d)) \times \lim_{d \rightarrow \infty} E_{\infty}(L(v d))} - 1 \\ &= \frac{2}{3 \max(v, 1/v)} \end{aligned}$$

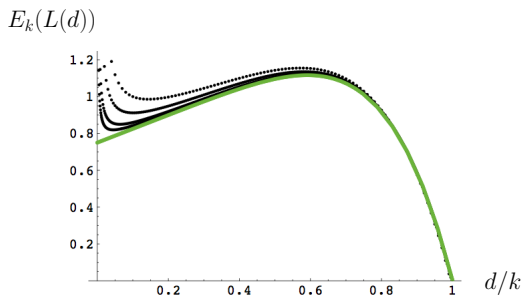


NB: indépendant de  $c$



# Résultats pour l'ensemble 1.

$$E_k(L(d)) = \frac{k^2(k+1)^2}{2d^2(2k+1)(5k^6+15k^5+14k^4+3k^3-k^2-1)} \times$$
$$\times \left( \frac{d(d+1)(d+2)(d+3)(10(k+1)^6-7(k+1)^4-2d(d+1)(d+2)(d+3)(5d^2+15d+14)-2)}{(k+1)^3(2d+3)} \right.$$
$$\left. - \frac{(d-1)d(d+1)(d+2)(10k^6-7k^4-2(d-1)d(d+1)(d+2)(5d^2+5d+4)-2)}{k^3(2d+1)} \right)$$

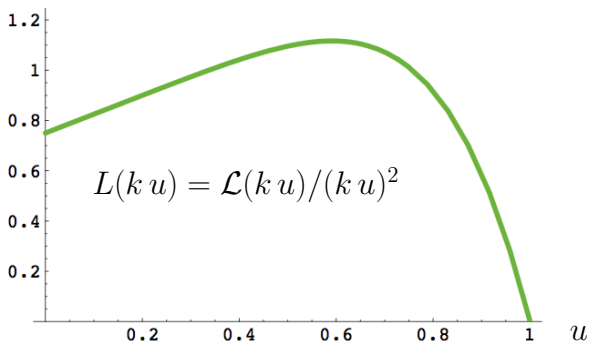


$k = 100, 200, 500$  et  $1000$

Si on s'intéresse à  $d$  et  $k$  grands avec  $u = d/k$  fini ( $0 < u < 1$ )

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_k(L(ku)) = \frac{3c}{2}(1 + u - 3u^6 + u^7)$$

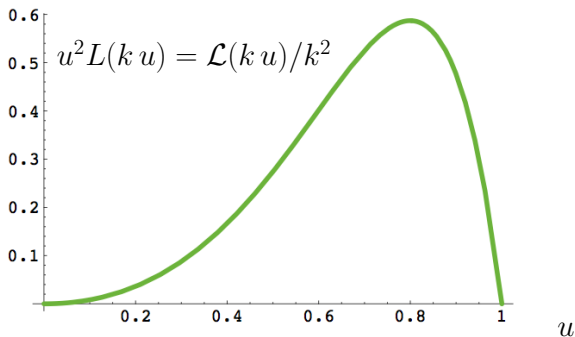
$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_k(L(ku))$$



Si on s'intéresse à  $d$  et  $k$  grands avec  $u = d/k$  fini ( $0 < u < 1$ )

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_k(L(ku)) = \frac{3c}{2}(1 + u - 3u^6 + u^7)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_k(u^2 L(ku))$$



$$\mathcal{P}(L; u) dL = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(L \leq L(k u) < L + dL)$$

$$\mathcal{P}(L; u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{L}}{c^{3/2}} e^{-\frac{L}{c}} \times \frac{\left( e^{\frac{L}{cb}} \sqrt{\frac{\pi L}{cb}} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{L}{cb}} \right) \right) - 1 \right) p\left(\frac{L}{cb}\right) + r\left(\frac{L}{cb}\right)}{4(\sqrt{b}+b)^3}$$

$$\text{où } b \equiv b(u) = \frac{(1-u)^2}{u^2}$$

$$p(\ell) \equiv 2b(b^2 - 1)\ell^2 - (5b^3 + 3b + 4)\ell + 6(b^3 - 1)$$

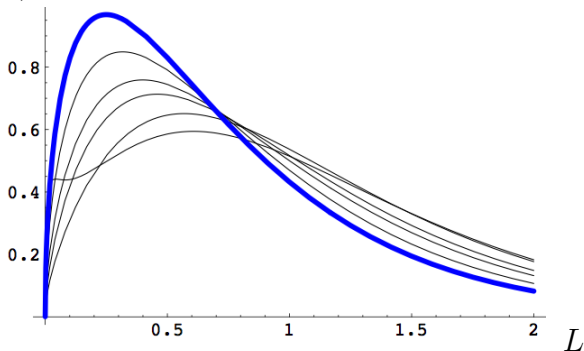
$$r(\ell) \equiv b(15b^2 - 1)\ell + 2(5b^3 - 1)$$

Quand  $u \rightarrow 0$ , on retrouve le résultat  $k = \infty$ :

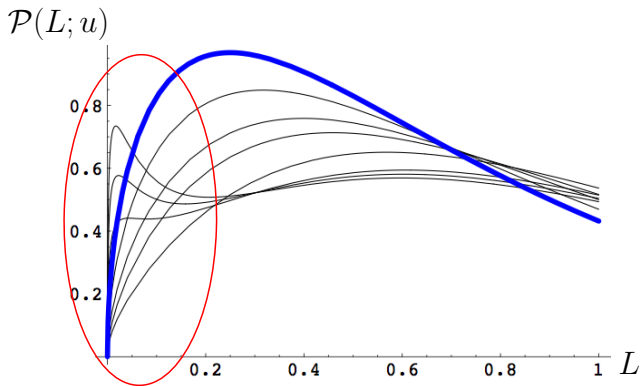
$$\mathcal{P}(L; 0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{L}}{c^{3/2}} e^{-\frac{L}{c}}$$

Quand  $u$  augmente ( $u = 0, 1/8, 1/4, 1/3, 1/2$  et  $2/3$ )

$\mathcal{P}(L; u)$



Emergence d'un pic ( $u = 0, 1/8, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 0.69$  et  $0.71$ )



Quand  $u \rightarrow 1$  ( $d \rightarrow k$ ), la bonne échelle pour  $\mathcal{L}(d)$  n'est plus  $d^2$ . Si on veut une **loi limite non-triviale**, il faut maintenant choisir comme échelle  $b(u) d^2 = (k - d)^2$

$$R(d) \equiv \frac{\mathcal{L}(d)}{(k - d)^2} = \frac{u^2}{(1 - u)^2} L(d)$$

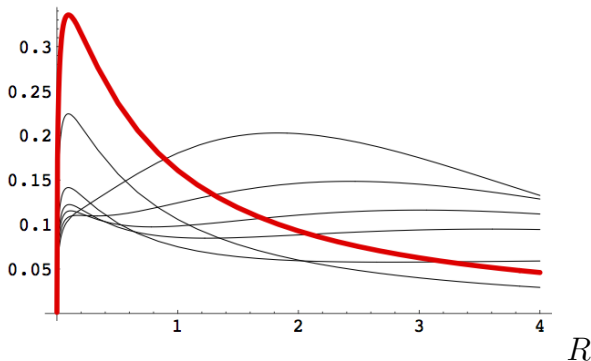
$$\tilde{\mathcal{P}}(R; u) dR = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(R \leq R(ku) < R + dR) = \frac{(1 - u)^2}{u^2} \mathcal{P}\left(\frac{(1 - u)^2}{u^2} R; u\right)$$

Quand  $u \rightarrow 1$

$$\tilde{\mathcal{P}}(R; 1) = 2\sqrt{\frac{R}{\pi c^5}}(R + c) - \frac{R}{c^3} (2R + 3c) e^{\frac{R}{c}} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{R}{c}}\right)\right)$$

$u = 0.64, 0.67, 0.69, 0.71, 0.75, 0.875$  et **1**

$\tilde{\mathcal{P}}(R; u)$



NB: pour  $k$  grand et  $u \rightarrow 1$ ,  $E_k(\mathcal{L}(k u)) \sim 15c k^2(1 - u)$   
donc  $E_k(R(k u)) \sim 15c k^2/(1 - u)$  diverge

Tous les moments de la loi limite à  $u = 1$  sont infinis !



# D'autres calculs sont possibles

- Contrôle du volume du hull: poids  $\beta G$  par triangle du hull  
→  $\lambda \equiv \lambda(\alpha, \beta)$  défini par

$$\alpha \sqrt{y} \frac{(1 + 10y + y^2)^{1/4}}{(1 + y)^{3/2}} \frac{(1 - y^d)(1 - y^{d+3})}{(1 - y^{d+1})(1 - y^{d+2})}$$
$$= \sqrt{x} \frac{(1 + 10x + x^2)^{1/4}}{(1 + x)^{3/2}} \frac{(1 - \lambda x^d)(1 - \lambda x^{d+3})}{(1 - \lambda x^{d+1})(1 - \lambda x^{d+2})}$$

$$\beta G = \frac{\sqrt{y(1+y)}}{(1+10y+y^2)^{3/4}}, \quad G = \frac{\sqrt{x(1+x)}}{(1+10x+x^2)^{3/4}}$$

→ résultats de [Curien et Le Gall \(2014\)](#), [Ménard \(2016\)](#)

# D'autres calculs sont possibles

- Contrôle du volume du hull
- Limite d'échelle ( $d$  et  $k$  d'ordre  $N^{1/4}$ )

$$G = \frac{1}{2 \cdot 3^{3/4}} (1 - \epsilon^4) \quad d = \frac{D}{\epsilon} \quad k = \frac{K}{\epsilon}$$

# D'autres calculs sont possibles

- Contrôle du volume du hull
- Limite d'échelle ( $d$  et  $k$  d'ordre  $N^{1/4}$ )

Merci