

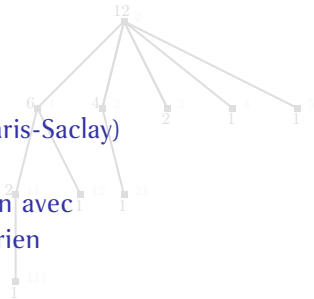
Quadrangulations aléatoires avec modèle $O(n)$: la cascade des périmètres des boucles

Pascal Maillard

(Université Paris-Sud, Université Paris-Saclay)

basé sur du travail en commun avec
Linxiao Chen et Nicolas Curien

Journée cartes, 13 avril 2016, IHÉS



- 1 Modèle et résultats
- 2 Cascades multiplicatives
- 3 Preuves
- 4 Lien avec CLE

Modèle et résultats

Définitions

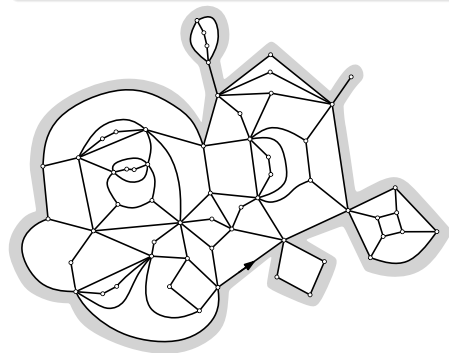
Carte à bord bipartie: c'est juste une carte planaire bipartie enracinée. On appelle *face externe* la face à droite de l'arête racine, et *faces internes* les autres faces.

Quadrangulation à bord: une carte à bord bipartie dont toutes faces internes sont de degré quatre.

Définitions

Carte à bord bipartie: c'est juste une carte planaire bipartie enracinée. On appelle *face externe* la face à droite de l'arête racine, et *faces internes* les autres faces.

Quadrangulation à bord: une carte à bord bipartie dont toutes faces internes sont de degré quatre.



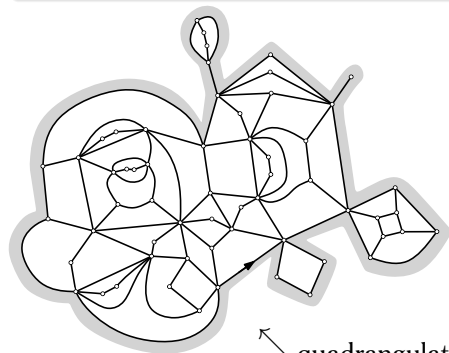
N.B.

Les bords sont quelconques

Définitions

Carte à bord bipartie: c'est juste une carte planaire bipartie enracinée. On appelle *face externe* la face à droite de l'arête racine, et *faces internes* les autres faces.

Quadrangulation à bord: une carte à bord bipartie dont toutes faces internes sont de degré quatre.



N.B.

Les bords sont quelconques

On note par $2p$ la périmètre de la carte à bord (i.e. le degré de la face externe).

quadrangulation à bord de périmètre $2p = 24$

Rappel: résultats d'énumération

Quadrangulations **pointées** à bord de longueur 2: poids g par face
(\approx quadrangulation enracinée et pointée sans bord)

$$Q_1^\bullet(g) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k}{k+1} \binom{2k}{k} g^k$$

Rappel: résultats d'énumération

Quadrangulations **pointées** à bord de longueur 2: poids g par face
(\approx quadrangulation enracinée et pointée sans bord)

$$Q_1^\bullet(g) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k}{k+1} \binom{2k}{k} g^k = 2 \cdot x(g) \quad \text{où} \quad x = 1 + 3gx^2$$

Rappel: résultats d'énumération

Quadrangulations **pointées** à bord de longueur 2: poids g par face
(\approx quadrangulation enracinée et pointée sans bord)

$$Q_1^\bullet(g) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k}{k+1} \binom{2k}{k} g^k = 2 \cdot x(g) \quad \text{où} \quad x = 1 + 3gx^2$$

Cartes biparties **pointées** à bord de périmètre $2p$: on donne un poids g_k à chaque face de degré $2k$, alors la fonction génératrice est donnée par

$$B_p^\bullet(g_1, g_2, \dots) := \sum_{m \in \mathcal{B}_p^\bullet} \prod_{k=1}^{\infty} g_k^{f_k(m)}$$

Rappel: résultats d'énumération

Quadrangulations **pointées** à bord de longueur 2: poids g par face
(\approx quadrangulation enracinée et pointée sans bord)

$$Q_1^\bullet(g) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k}{k+1} \binom{2k}{k} g^k = 2 \cdot x(g) \quad \text{où} \quad x = 1 + 3gx^2$$

Cartes biparties **pointées** à bord de périmètre $2p$: on donne un poids g_k à chaque face de degré $2k$, alors la fonction génératrice est donnée par

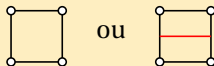
$$B_p^\bullet(g_1, g_2, \dots) := \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{B}_p^\bullet} \prod_{k=1}^{\infty} g_k^{f_k(\mathbf{m})} = \binom{2p}{p} \cdot x(\mathbf{g})^p$$

où $x = 1 + \phi_{\mathbf{g}}(x)$ avec

$$\phi_{\mathbf{g}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_k x^k \quad \tilde{g}_k = \binom{2k-1}{k} g_k$$

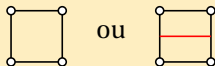
Modèle $O(n)$ sur les quadrangulations

Une **configuration de boucles** sur une quadrangulation à bord q est un ensemble de chemins fermés **simples** et **disjoints** sur le dual de q ne passant pas par la face externe. On se restreint aux boucles dites **rigides**, i.e. chaque face interne est du type



Modèle $O(n)$ sur les quadrangulations

Une **configuration de boucles** sur une quadrangulation à bord q est un ensemble de chemins fermés **simples** et **disjoints** sur le dual de q ne passant pas par la face externe. On se restreint aux boucles dites **rigides**, i.e. chaque face interne est du type



Soit \mathcal{O}_p l'ensemble des couples (q, ℓ) où q est une quadrangulation à bord de longueur $2p$ et ℓ une telle configuration de boucles sur q .

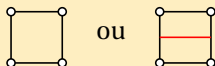
Pour $n \in (0, 2)$ et $g, h > 0$, soit

$$F_p(n; g, h) = \sum_{(q, \ell) \in \mathcal{O}_p} g^{\#\square} h^{\#\square_{\text{red}}} n^{\#\text{red}}$$

The equation shows the sum over configurations. The terms are: $g^{\#\square}$ (where \square is a square), $h^{\#\square_{\text{red}}}$ (where \square_{red} is a square with a red line), and $n^{\#\text{red}}$ (where red is a red loop).

Modèle $O(n)$ sur les quadrangulations

Une **configuration de boucles** sur une quadrangulation à bord q est un ensemble de chemins fermés **simples** et **disjoints** sur le dual de q ne passant pas par la face externe. On se restreint aux boucles dites **rigides**, i.e. chaque face interne est du type



Soit \mathcal{O}_p l'ensemble des couples (q, ℓ) où q est une quadrangulation à bord de longueur $2p$ et ℓ une telle configuration de boucles sur q .

Pour $n \in (0, 2)$ et $g, h > 0$, soit

$$F_p(n; g, h) = \sum_{(q, \ell) \in \mathcal{O}_p} g^{\#\square} h^{\#\square_{\text{red}}} n^{\#\text{red loop}}$$

Le triplet $(n; g, h)$ est **admissible** si $F_p(n; g, h) < \infty$. (Cela ne dépend pas de p .)

Modèle $O(n)$ sur les quadrangulations

Définition

Fixe $p > 0$. Pour chaque triplet $(n; g, h)$ admissible, on définit une loi de probabilité sur \mathcal{O}_p par

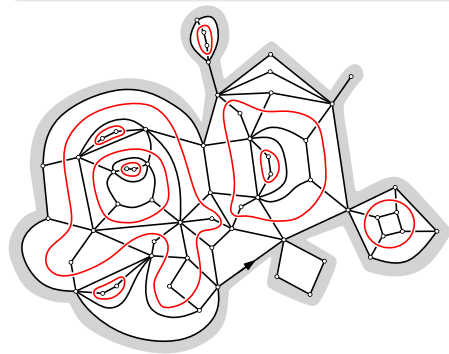
$$\mathbb{P}_{n;g,h}^{(p)}((\mathfrak{q}, \ell)) = \frac{g^{\#} \square h^{\#} \square n^{\#} \text{loop}}{F_p(n; g, h)}$$

Modèle $O(n)$ sur les quadrangulations

Définition

Fixe $p > 0$. Pour chaque triplet $(n; g, h)$ admissible, on définit une loi de probabilité sur \mathcal{O}_p par

$$\mathbb{P}_{n;g,h}^{(p)}((\mathbf{q}, \ell)) = \frac{g^{\#\square} h^{\#\square} n^{\#\text{boucle}}}{F_p(n; g, h)}$$



$$\rightsquigarrow \mathbb{P}_{n;g,h}^{(12)}(\cdot) = \frac{g^8 h^{38} n^9}{F_{12}(n; g, h)}$$

Théorème (Borot, Bouttier, Guitter '12)

Pour tout $(n; g, h)$ admissible, il existe $\kappa(n; g, h)$ et $\alpha(n; g, h)$ tels que

$$F_p(n; g, h) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} C \kappa^p p^{-\alpha-1/2}$$

Théorème (Borot, Bouttier, Guitter '12)

Pour tout $(n; g, h)$ admissible, il existe $\kappa(n; g, h)$ et $\alpha(n; g, h)$ tels que

$$F_p(n; g, h) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} C \kappa^p p^{-\alpha-1/2}$$

Pour chaque $n \in (0, 2)$ fixé, on a trois phases selon la valeur de α
sous-critique: $\alpha = 1$ critique générique: $\alpha = 2$

critique non-générique

phase dense: $\alpha = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} \arccos(n/2) \in (1, 3/2)$

phase diluée: $\alpha = \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \arccos(n/2) \in (3/2, 2)$

Théorème (Borot, Bouttier, Guitter '12)

Pour tout $(n; g, h)$ admissible, il existe $\kappa(n; g, h)$ et $\alpha(n; g, h)$ tels que

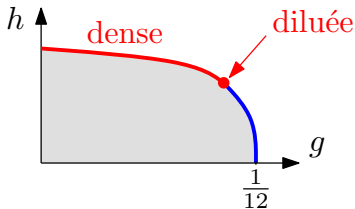
$$F_p(n; g, h) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} C \kappa^p p^{-\alpha-1/2}$$

Pour chaque $n \in (0, 2)$ fixé, on a trois phases selon la valeur de α
sous-critique: $\alpha = 1$ critique générique: $\alpha = 2$

critique non-générique

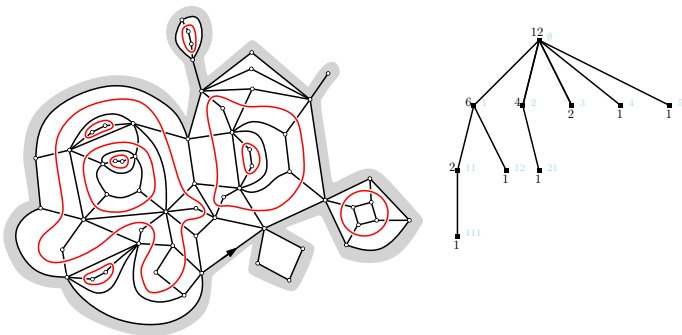
phase dense: $\alpha = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} \arccos(n/2) \in (1, 3/2)$

phase diluée: $\alpha = \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \arccos(n/2) \in (3/2, 2)$



La cascade des périmètres des boucles

Nous nous intéressons à la **structure hiérarchique** des boucles qu'on représente par un **arbre** marqué des **(semi-)périmètres** des boucles.



On complète l'arbre par des sommets de marque 0, cela donne un processus aléatoire $(\chi^{(p)}(u))_{u \in \mathcal{U}}$ avec $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{N}^*)^n$ l'**arbre d'Ulam**. Nous appelons ce processus la **cascade des (semi-)périmètres des boucles**.

Résultat principal

Theorem (Chen, Curien, M. 2016+)

Soit $(\chi^{(p)}(u))_{u \in \mathcal{U}}$ la cascade des semi-périmètres des boucles. On a alors la convergence en loi suivante dans $\ell_\infty(\mathcal{U})$:

$$\left(\frac{1}{p} \chi^{(p)}(u) \right)_{u \in \mathcal{U}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} (Z_\alpha(u))_{u \in \mathcal{U}},$$

où $Z_\alpha = (Z_\alpha(u))_{u \in \mathcal{U}}$ est une certaine cascade multiplicative qui sera définie après.

Cascades multiplicatives

Cascades multiplicatives

Definition

Une **cascade multiplicative** est un processus $Z = (Z(u))_{u \in \mathcal{U}}$ avec

$$Z(\emptyset) = 1, \quad \forall u \in \mathcal{U}, i \in \mathbb{N}^* : Z(ui) = Z(u) \cdot \xi_i^{(u)},$$

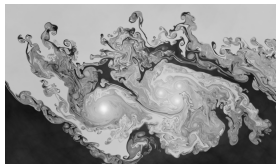
où $(\xi^{(u)})_{u \in \mathcal{U}} = ((\xi_i^{(u)})_{i \in \mathbb{N}^*})_{u \in \mathcal{U}}$ est une famille iid de vecteurs aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$. La loi de $\xi = \xi^{(\emptyset)}$ est appelée la **loi de reproduction** de la cascade Z .

NB: $X = \log Z = (\log Z(u))_{u \in \mathcal{U}}$ est appelée une **marche aléatoire branchante**.

Cascades multiplicatives et marches aléatoires branchantes : un historique

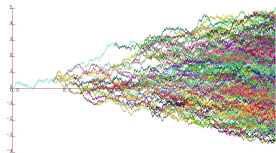
Cascades multiplicatives: Mandelbrot, Kahane, Peyrière...

- Motivation: Modèle de la cascade d'énergie dans des fluides turbulents
- Étudiée principalement sur un arbre d -aire (c-à-d $\xi_i = 0$ pour $i > d$).
- Cascade multiplicative donne une mesure aléatoire sur la frontière de l'arbre, la théorie traite principalement les propriétés multifractales de cette mesure aléatoire. Interaction entre la géométrie de l'arbre et les valeurs du processus $Z(u)$.



Marches aléatoires branchantes: Hammersley, Kingman, Biggins...

- Motivation: Généralisation du processus Crump-Mode-Jagers (processus de branchement avec âge)
- u : particule, $X(u)$: position de la particule u .
- Théorie traite principalement la distribution des positions des particules, en ignorant la géométrie de l'arbre. Attention particulière aux particules extrémales.

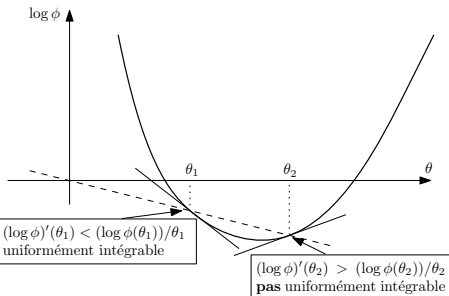


Transformée de Mellin et martingales

Definition (Transformée de Mellin)

$$\phi(\theta) := \mathbb{E} \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} (\xi_i)^\theta \right] \in (-\infty, +\infty]$$

- $\log \phi$ est convexe
- $W_n^{(\theta)} := \phi(\theta)^{-n} \sum_{|u|=n} Z(u)^\theta$ est une martingale.



Theorem (Biggins, Lyons)

$W_n^{(\theta)}$ est uniformément intégrable ssi

$$\mathbb{E}[W_1^{(\theta)} \log^+ W_1^{(\theta)}] < \infty \text{ et } (\log \phi)'(\theta) < (\log \phi(\theta))/\theta$$

La cascade multiplicative Z_α

- $\zeta = (\zeta_t)_{t \geq 0}$: processus de Lévy α -stable sans sauts négatifs issu de 0.
- τ : temps d'atteinte de -1 du processus ζ .
- $(\Delta\zeta)_\tau^\downarrow$: hauteurs des sauts de ζ avant le temps τ , ordonnées \downarrow
- $\tilde{\nu}_\alpha$: loi de $(\Delta\zeta)_\tau^\downarrow$.
- $d\nu_\alpha := \frac{1/\tau}{\mathbb{E}[1/\tau]} d\tilde{\nu}_\alpha$.

La cascade multiplicative Z_α

- $\zeta = (\zeta_t)_{t \geq 0}$: processus de Lévy α -stable sans sauts négatifs issu de 0.
- τ : temps d'atteinte de -1 du processus ζ .
- $(\Delta\zeta)_\tau^\downarrow$: hauteurs des sauts de ζ avant le temps τ , ordonnées \downarrow
- $\tilde{\nu}_\alpha$: loi de $(\Delta\zeta)_\tau^\downarrow$.
- $d\nu_\alpha := \frac{1/\tau}{\mathbb{E}[1/\tau]} d\tilde{\nu}_\alpha$.

Theorem (Chen, Curien, M. 2016+)

Soit $(\chi^{(p)}(u))_{u \in \mathcal{U}}$ la cascade des semi-périmètres des boucles. On a alors la convergence en loi suivante dans $\ell_\infty(\mathcal{U})$:

$$\left(\frac{1}{p} \chi^{(p)}(u) \right)_{u \in \mathcal{U}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} (Z_\alpha(u))_{u \in \mathcal{U}},$$

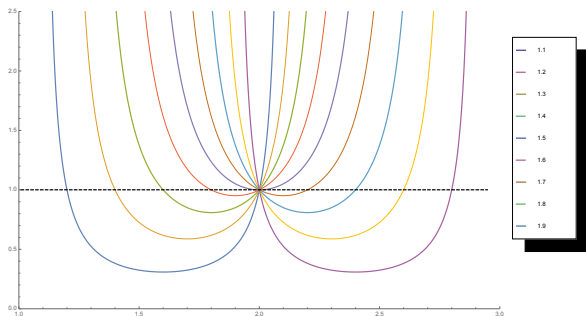
où $Z_\alpha = (Z_\alpha(u))_{u \in \mathcal{U}}$ est la cascade multiplicative de loi de reproduction ν_α .

Propriétés de Z_α

Theorem (Chen, Curien, M. 2016+)

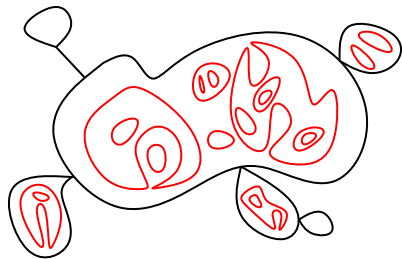
La transformée de Mellin de la cascade multiplicative Z_α est

$$\phi_\alpha(\theta) = \frac{\sin(\pi(2 - \alpha))}{\sin(\pi(\theta - \alpha))} \quad \text{pour } \theta \in (\alpha, \alpha + 1) \quad \text{et} \quad \phi_\alpha(\theta) = \infty \text{ sinon.}$$

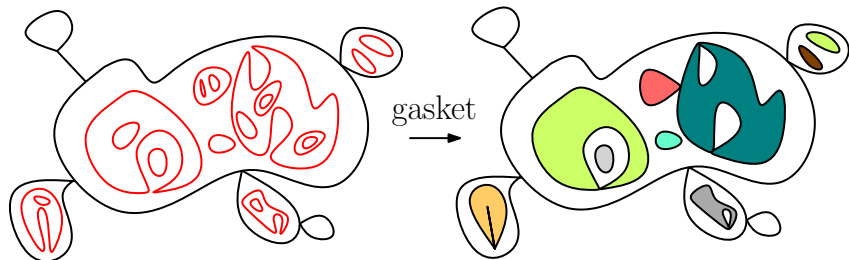


Preuves

Décomposition de gasket

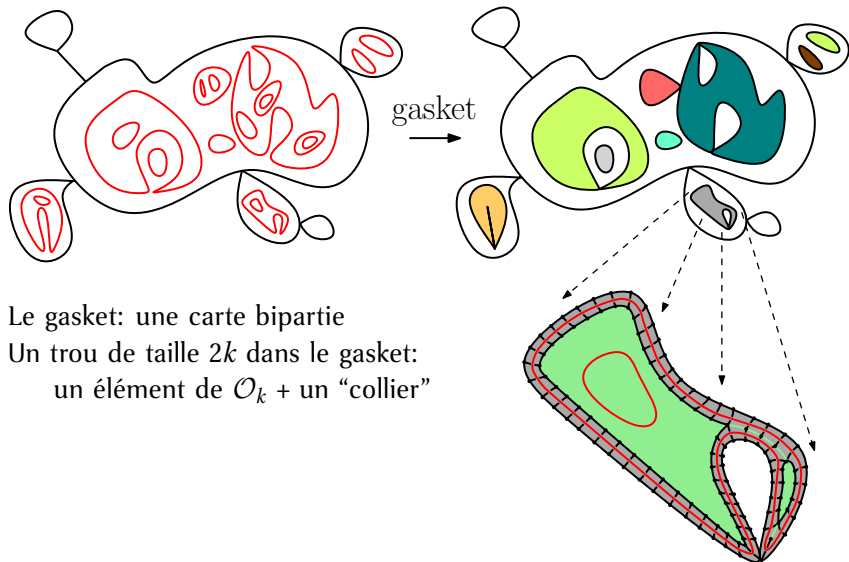


Décomposition de gasket



Le gasket: une carte bipartie

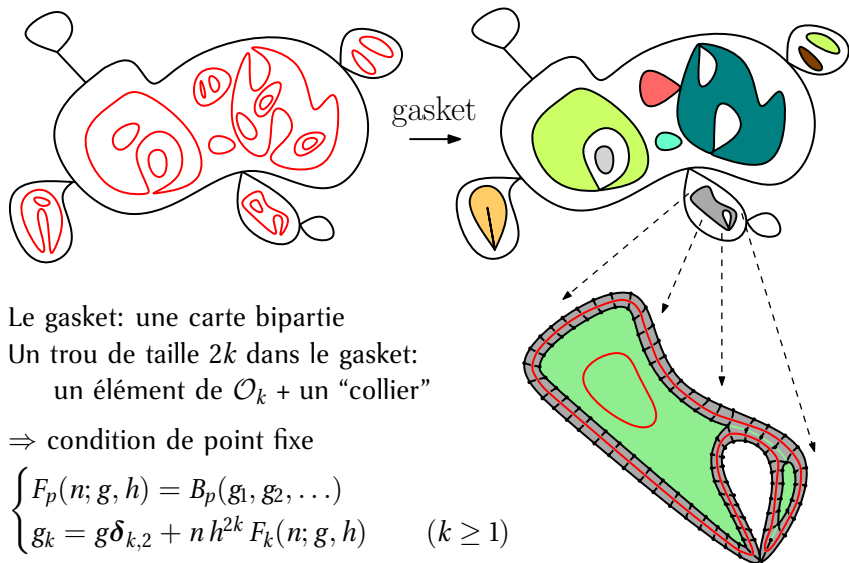
Décomposition de gasket



Le gasket: une carte bipartie

Un trou de taille $2k$ dans le gasket:
un élément de \mathcal{O}_k + un "collier"

Décomposition de gasket

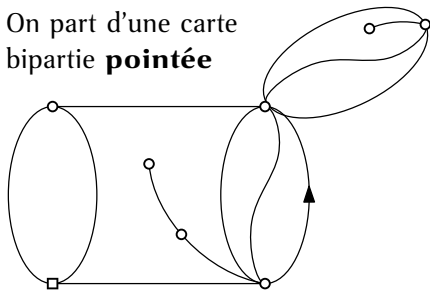




Un joint de culasse (*head gasket*).

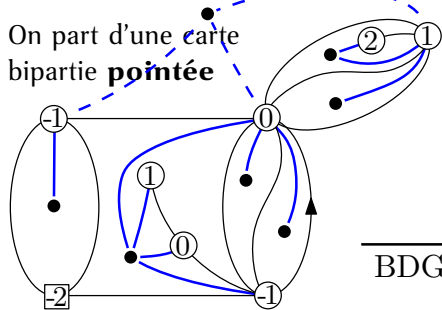
Codage du gasket: les bijections de BDG et de JS

On part d'une carte
bipartie **pointée**

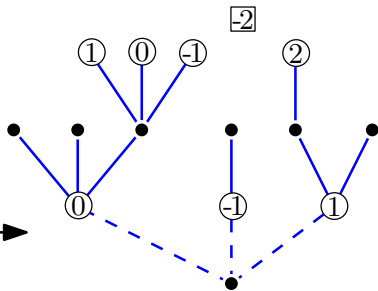


Codage du gasket: les bijections de BDG et de JS

On part d'une carte bipartie **pointée**

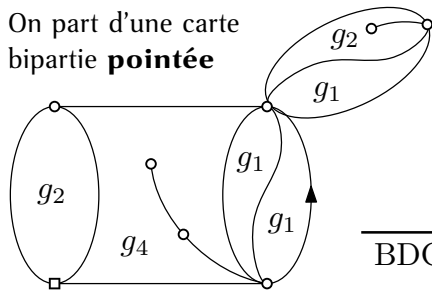


BDG

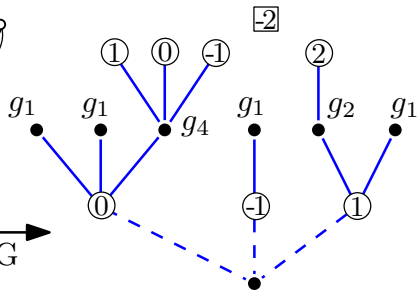


Codage du gasket: les bijections de BDG et de JS

On part d'une carte bipartie **pointée**



BDG



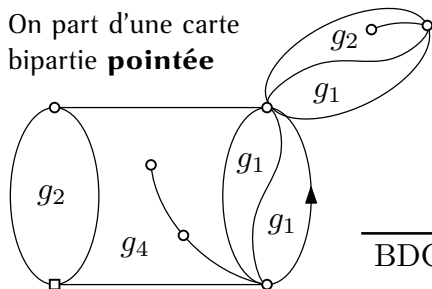
$g_k \rightsquigarrow$ face de degré $2k$

$g_k \rightsquigarrow$ \bullet de degré k

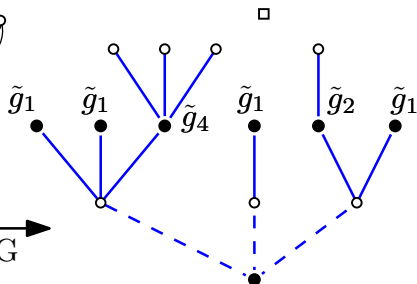
BDG \rightarrow

Codage du gasket: les bijections de BDG et de JS

On part d'une carte bipartie **pointée**



BDG



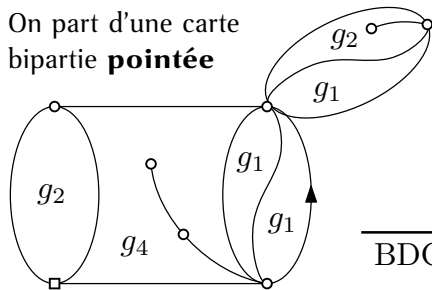
$g_k \rightsquigarrow$ face de degré $2k$

$g_k \rightsquigarrow$ \bullet de degré k

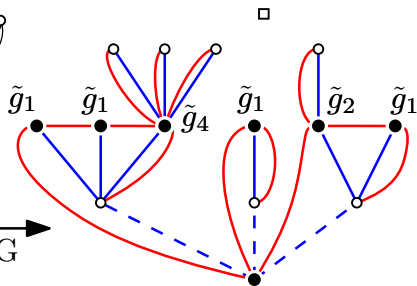
$\tilde{g}_k \rightsquigarrow$ \bullet de degré k $\tilde{g}_k = g_k \binom{2k-1}{k}$

Codage du gasket: les bijections de BDG et de JS

On part d'une carte bipartie **pointée**



BDG →



$g_k \rightsquigarrow$ face de degré $2k$

$g_k \rightsquigarrow$ ● de degré k

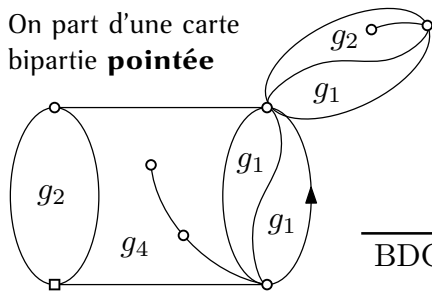
$\tilde{g}_k \rightsquigarrow$ ● de degré k $\tilde{g}_k = g_k \binom{2k-1}{k}$

\xrightarrow{BDG}

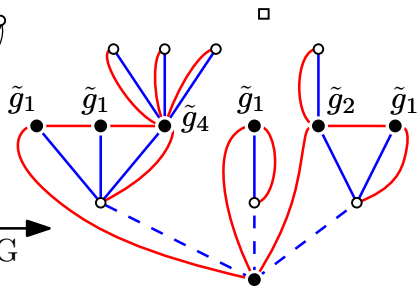
$\xrightarrow{\text{étiquette}}$

Codage du gasket: les bijections de BDG et de JS

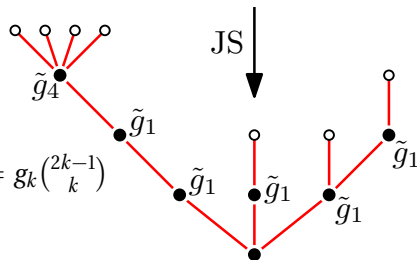
On part d'une carte bipartie **pointée**



BDG →



JS ↓



$g_k \rightsquigarrow$ face de degré $2k$

$g_k \rightsquigarrow$ ● de degré k

$\tilde{g}_k \rightsquigarrow$ ● de degré k

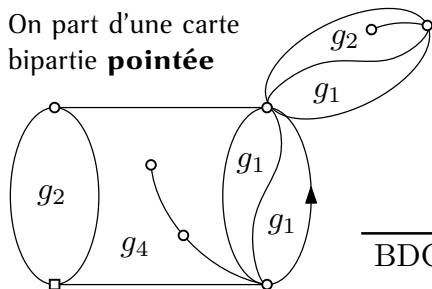
$$\tilde{g}_k = g_k \binom{2k-1}{k}$$

BDG →

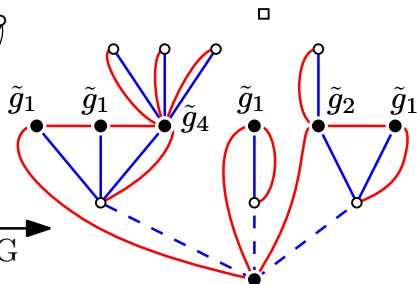
étiquette →

Codage du gasket: les bijections de BDG et de JS

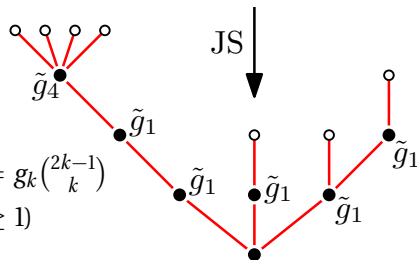
On part d'une carte bipartie **pointée**



BDG →



JS ↓



$g_k \rightsquigarrow$ face de degré $2k$

$g_k \rightsquigarrow$ ● de degré k

$\tilde{g}_k \rightsquigarrow$ ● de degré k $\tilde{g}_k = g_k \binom{2k-1}{k}$

$\tilde{g}_k \rightsquigarrow$ ● avec k enfants ($k \geq 1$)

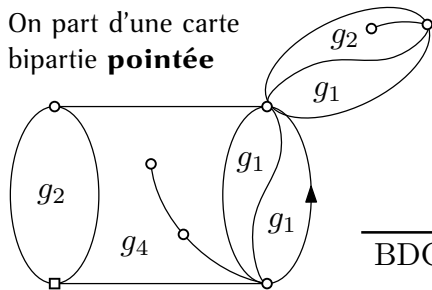
BDG →

étiquette →

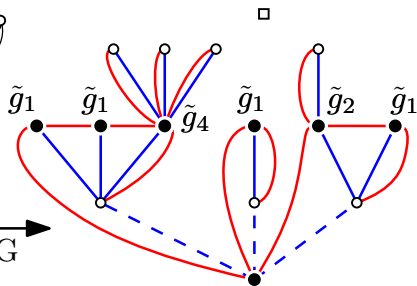
JS →

Codage du gasket: les bijections de BDG et de JS

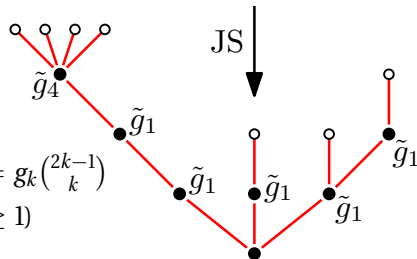
On part d'une carte bipartie **pointée**



BDG →



JS ↓



$g_k \rightsquigarrow$ face de degré $2k$

$g_k \rightsquigarrow$ ● de degré k

$\tilde{g}_k \rightsquigarrow$ ● de degré k $\tilde{g}_k = g_k \binom{2k-1}{k}$

$\tilde{g}_k \rightsquigarrow$ ● avec k enfants ($k \geq 1$)

(1 \rightsquigarrow ○ avec 0 enfants)

BDG →

étiquette →

JS →

Codage du gasket: les bijections de BDG et de JS

Si la carte bipartie **pointée** de départ suit la loi de Boltzmann:

$$\mathbb{P}_{p,\mathbf{g}}^\bullet(M = \mathbf{m}) = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} g_k^{f_k(\mathbf{m})}}{B_p^\bullet(\mathbf{g})}$$

alors les bijections de BDG et JS donnent une **forêt** de p arbres de Galton–Watson i.i.d. de loi de reproduction $(x^{-1}, \tilde{g}_1, x \tilde{g}_2, \dots)$, où x est la solution positive minimale de $x = 1 + \phi_{\mathbf{g}}(x)$. (Existe si \mathbf{g} admissible, i.e. si $B_p^\bullet(\mathbf{g}) < \infty$). NB: loi de reproduction est de moyenne 1 et de queue asymptotique à $Ck^{-\alpha}$ (BBG).

Les demi-degrés des faces de la carte **pointée** de départ se lisent alors comme les **degrés des sommets internes de cette forêt de Galton–Watson**.

En dépointant, on biaise cette loi par $1/\{\text{nombre de sommets de la carte}\} = 1/\{\text{nombre de feuilles de la forêt de GW}\}$

Codage du gasket: limit d'échelle des tailles des trous

Conclusion

Soient $(\chi^{(p)}(i))_{i \in \mathbb{N}^*}$ les demi-degrés des faces du gasket, ordonnés \downarrow . Alors, $\forall F$ bornée,

$$\mathbb{E}_{p, \mathbf{g}}[F((\chi^{(p)}(i))_{i \in \mathbb{N}^*})] = \frac{\mathbb{E}_{GW} \left[\frac{1}{\# \text{feuilles}} F((D_i)_{i \in \mathbb{N}^*}) \right]}{\mathbb{E}_{GW} \left[\frac{1}{\# \text{feuilles}} \right]},$$

où $(D_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont les degrés des sommets internes de la forêt de GW décrite précédemment, ordonnés \downarrow .

En codant la forêt de GW par sa [marche de Łucasiewicz](#) et en utilisant le fait que $\# \text{feuilles} \approx c \times \# \text{sommets}$, on obtient

Proposition

La loi de $(\frac{1}{p} \chi^{(p)}(i))_{i \in \mathbb{N}^*}$ sous $\mathbb{P}_{p, \mathbf{g}}$ converge vers ν_α quand $p \rightarrow \infty$.

Une formule sur des marches aléatoires

Theorem (CCM)

Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$ une marche aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z} avec $X_1 \geq -1$ p.s. Soit T_p le temps d'atteinte de $-p$. Alors pour tout $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable et tout $p \geq 2$ on a

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{T_p - 1} \sum_{i=1}^{T_p} f(X_i) \right] = \mathbb{E} \left[f(X_1) \frac{p}{p + X_1} \right].$$

Theorem (CCM)

Soit $(\eta_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy sans sauts négatifs et de mesure de Lévy π . Soit τ le temps d'atteinte de -1 . Alors pour tout $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{\tau} \sum_{t \leq \tau} f(\Delta \eta_t) \right] = \int f(x) \frac{1}{1+x} \pi(dx).$$

Preuve de la formule sur les marches aléatoires

$$\begin{aligned}A_n &:= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n f(X_i) \mathbf{1}_{(T_p=n)} \right] \\&= \frac{p}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n f(X_i) \mathbf{1}_{(S_n=-p)} \right] && \text{by Kemperman's formula} \\&= p \mathbb{E} [f(X_1) \mathbf{1}_{(S_n=-p)}] && \text{by cyclic symmetry} \\&= p \mathbb{E} [f(X_1) \mathbb{P}(S_{n-1} = -p - X_1 | X_1)] && \text{by Markov property} \\&= \mathbb{E} \left[f(X_1) \frac{p}{p + X_1} (n-1) \mathbb{P}(T_{-p-X_1} = n-1 | X_1) \right] && \text{by Kemperman's formula.}\end{aligned}$$

Since $p \geq 2$ we have $T_p \geq 2$ almost surely, hence

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\frac{1}{T_p - 1} \sum_{i=1}^{T_p} f(X_i) \right] &= \sum_{n=2}^{\infty} A_n / (n-1) = \mathbb{E} \left[f(X_1) \frac{p}{p + X_1} \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(T_{-p-X_1} = n-1 | X_1) \right] \\&= \mathbb{E} \left[f(X_1) \frac{p}{p + X_1} \right].\end{aligned}$$

Lien avec CLE